ISSN 2686-679X

ВЕСТНИК РГГУ

Серия
«Информатика.
Информационная безопасность.
Математика»

Научный журнал

RSUH/RGGU BULLETIN

“Information Science.
Information Security. Mathematics”
Series

Academic Journal

Основан в 2018 г.
Founded in 2018

2
2019

VESTNIK RGGU. Seriya «Informatica. Informacionnaya bezopasnost. Matematica»

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series
Academic Journal

There are 4 issues of the printed version of the journal a year.

Founder and Publisher
Russian State University for the Humanities (RSUH)

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is included: in the Russian Science Citation Index; in the List of leading scientific magazines journals and other editions for publishing PhD research findings peer-reviewed publications fall within the following research area:

20.00.00 Informatics

81.03.29 Information security, data protection,

27.00.00 Mathematics

Objectives and areas of research

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series publishes the results of research by scientists from RSUH and other universities and other Russian and foreign academic institutions. The areas covered by contributions include theoretical and applied computer science, up-to-date IT, means and technologies of information protection and information security as well as the issues of theoretical and applied mathematics including analytical and imitation models of different processes and objects. Special emphasis is put on articles and reviews covering research in indicated directions in the areas of social and humanitarian problems and also issues of personnel training for these directions.

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is registered by Federal Service for Supervision of Communications Information Technology and Mass Media. 25.05.2018, reg. No. FS77-72977

Editorial staff office: 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993, GSP-3

tel: +7 (916) 250-90-85

e-mail: adkozlov@mail.ru

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика»

Научный журнал
Выходит 4 номера печатной версии журнала в год.
Учредитель и издатель – Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» включен: в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ); в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы в основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

20.00.00 Информатика

81.93.29 Информационная безопасность, защита информации

27.00.00 Математика

Цели и область

В журнале «Вестник РГГУ», серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» публикуются результаты научных исследований ученых и специалистов РГГУ, а также других университетов и научных учреждений России и зарубежных стран. Направления публикаций включают теоретическую и прикладную информатику, современные информационные технологии, методы, средства и технологии защиты информации и обеспечения информационной безопасности, а также проблемы теоретической и прикладной математики, включая разработку аналитических и имитационных моделей процессов и объектов различной природы. Особое внимание уделяется статьям и обзорам, посвященным исследованиям по указанным направлениям в области социальных и гуманитарных проблем, а также вопросам подготовки кадров по соответствующим специальностям для данных направлений.

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций 25.05.2018 г., регистрационный номер ПИ № ФС77-72977.

Адрес редакции: 125993, ГСП-3, Россия, Москва, Миусская пл., 6

Тел: +7 (916) 250-90-85

электронный адрес: adkozlov@mail.ru

Founder and Publisher
Russian State University for the Humanities (RSUH)

Учредитель и издатель
Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

Ответственный за выпуск:

А.Д. Козлов, кандидат технических наук, доцент (РГГУ)

Contents

Содержание

УДК 550.3:004
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-8-16

Анализ востребованности результатов исследований в отдельных областях наук о Земле

Валерий В. Арутюнов

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, warut698@yandex.ru

Наталия В. Гришина

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, grnat@rambler.ru

Аннотация. В работе анализируется значимость геологических знаний для решения широкого круга практических задач. На основе ряда наукометрических показателей (публикационной активности, цитируемости и др.) по данным Научной электронной библиотеки России для ученых, работающих в области геофизики, географии, геодезии и картографии, выявлена динамика изменения в 2012–2018 гг. числа публикаций, их цитируемости и востребованности результатов исследований, отраженных в публикациях. Выявлен рост числа публикаций за анализируемый период во всех трех сферах исследований; отмечается различный уровень уменьшения показателей цитируемости и востребованности для вышеуказанных областей знаний.

Ключевые слова: науки о Земле, цитируемость, геофизика, география, геодезия и картография, публикационная активность, результативность научной деятельности

Для цитирования: Арутюнов В.В., Гришина Н.В. Анализ востребованности результатов исследований в отдельных областях наук о Земле // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 8–16. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-8-16

Analysis of the research results relevance in selected areas of the Earth Science

Valery V. Arutyunov

Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, warut698@yandex.ru

Nataly V. Grishina

Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, grnat@rambler.ru

Abstract. The paper analyzes the importance of geological knowledge for solving a wide range of practical tasks. According to the Scientific electronic library of Russia and on the basis of a number of scientometric indicators (publication activity, citation, etc.) for scientists, working on Geophysics, geography, geodesy and cartography, the dynamics of changes in 2012–2018 publications, their citation and the demand for research results reflected in the publications are identified. The authors detect an increase in the number of publications for the analyzed period in all three areas of research. There is a different level of reduction in citation rates and demand for all the areas of knowledge mentioned above.

Keywords: Earth Sciences, citation, geophysics, geography, geodesy and cartography, publication activity, efficiency of scientific activity

For citation: Arutyunov VV., Grishina NV. Analysis of the research results relevance in selected areas of the Earth Science. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series.* 2019;2:8-16. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-8-16

Введение

Развитие наук о Земле, в число которых входят география, геодезия и картография, геофизика и ряд других, сыграло основополагающую роль в формировании современного научного мировоззрения. Причина заключается в том, что, во-первых, без знания сути геологических процессов практически было невозможным целостное восприятие и понимание всего того, что имеет место в окружающей нас природе. Во-вторых, геология весьма широко раздвинула во времени горизонты научной мысли, введя в современную деятельность науки сведения о процессах, протекавших сотни миллионов и даже миллиарды лет тому назад. В-третьих, именно геология стала основой для глубокого междисциплинарного синтеза научных знаний, основы которого были заложены трудами В.И. Вернадского.

Знание ресурсов Земли и умение экологически безопасным образом управлять ими во многом способствуют повышению уровня жизни населения стран, где эти ресурсы активно используются. К настоящему времени человечество накопило значительный опыт по передаче из развитых стран в развивающиеся государства геоинформации и геологических знаний, которые необходимы в том числе для решения фундаментальных геонаучных проблем, связанных с обеспечением устойчивого развития государств.

Геологические знания требуются для решения широкого круга практических задач, в числе которых можно выделить следующие.

1. Поиски месторождений полезных ископаемых, без открытия которых невозможно развитие минерально-сырьевой базы и экономики любого государства. Особо важное значение это имеет и для России, обладающей широким спектром запасов минерального сырья.
2. Определение геологических условий при строительстве. Недостаток знаний о геологическом строении или их недоучет может привести к возникновению серьезных инженерно-технических проблем, вплоть до разрушения зданий и других конструкций и сооружений.
3. Предупреждение и прогнозирование опасностей, связанных с природными геологическими процессами – оползнями, селями, землетрясениями, обвалами, извержениями вулканов и т. п.
4. Изучение геологических аспектов устойчивости экологических систем различного уровня, вплоть до биосферы Земли в целом; прогнозирование их возможных изменений. В современных условиях, когда масштабы влияния деятельности человека на природу неуклонно возрастают, этот прикладной аспект геологии приобретает все более важное значение.

Российская Федерация обладает значительным природноресурсным потенциалом: на ее территории сосредоточено около трети мировых запасов природного газа, ~14% нефти, 24% железных руд, более 20% пресных вод, около 20% лесных ресурсов. При этом на направления работ, связанные с регионально-геологическими исследованиями, изучением месторождений полезных ископаемых, геофизическими исследованиями, разработкой техники и технологии проведения геологоразведочных работ, направляется значительная часть финансовых средств, выделяемых Министерством природных ресурсов и экологии России на проведение геологических исследований.

В этой связи несомненный интерес представляет востребованность научным сообществом результатов исследований ученых в различных направлениях наук о Земле. В конце XX – начале XXI в. для российских ученых-геологов эта востребованность определялась на базе специализированной автоматизированной информационной системы, в которой аккумулировались данные о геологических отчетах по выполненным научно-исследовательским работам, результатам геологических изысканий и запросам организаций на эти документы [1].

Несмотря на то что существуют различные методы оценки результативности научной деятельности [2], в последние десятилетия в России и в мире для количественной оценки результативности научной деятельности ученых, организаций и стран широко используется совокупность наукометрических показателей, включающая индекс Хирша, показатели публикационной активности P ученых, цитируемости C отраженных в публикациях итогов исследований, а также востребованность V этих результатов работ, определяемая соотношением C / P.

Анализ наукометрических показателей оценки результативности научной деятельности в области геофизики, географии, геодезии и картографии

В работе [3] рассматривается постановка исследования более 20 естественнонаучных отраслей знания (в том числе с учетом ряда направлений в науках о Земле) на основе баз данных системы РИНЦ (Российского индекса научного цитирования) с целью анализа результативности научной деятельности ученых для формирования новых знаний о региональных научных кластерах, организациях и персоналиях – лидерах научных исследований в этих отраслях наук.

Ниже приводятся результаты анализа динамики публикаций ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии, в которых отражаются итоги их исследований в этих сферах, их цитируемость, а также востребованность.

Данные показатели были получены на основе сведений из базы данных РИНЦ [4], созданной в Научной электронной библиотеке России.

На рис. 1 представлена динамика в 2012–2018 гг. публикационной активности ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии.

Как следует из рис. 1, наибольшее количество публикаций отмечалось для геофизики, наименьшее – для геодезии и картографии; при этом, если число публикаций в сфере геофизики в различные годы превышало количество последних в области географии в 2,5–3 раза, то при сравнении с потоком публикаций в области геодезии и картографии это превышение составило более чем на поря-

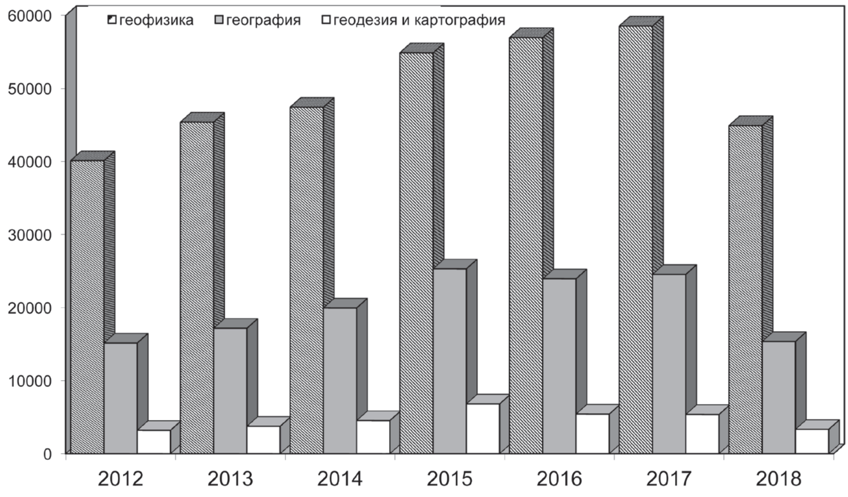

Рис.1. Динамика публикационной активности ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии

док. Это объясняется в том числе и тем, что результаты различных геофизических исследований активно используются при поиске полезных ископаемых, число видов которых на территории России превышает 100.

Из рис. 1 также видно, что если публикационная активность ученых в сфере геофизики возрастала до 2017 г., то в двух других сферах исследований этот рост наблюдался лишь до 2015 г. (в последующие годы отмечался его спад – возможно, в результате экономического кризиса); при этом если с 2012 г. рост публикаций до максимума для геофизики составлял около 50%, то для двух других областей исследований он достиг 70%.

Динамика цитируемости ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии представлена на рис. 2.

Как видно из рис. 2, отмечается ряд особенностей цитирования в рассматриваемых областях исследований.

Во-первых, показатели цитирования для всех трех сфер исследований в отличие от показателей публикационной активности непрерывно уменьшались в течение всего рассматриваемого периода; при этом если в 2017 г. по сравнению с 2012 г. для геофизики и географии они уменьшились практически в пять раз, то для геодезии и картографии – примерно втрое.

Во-вторых, наибольшие показатели цитирования отмечались в области геофизики, наименьшие – в геодезии и картографии.

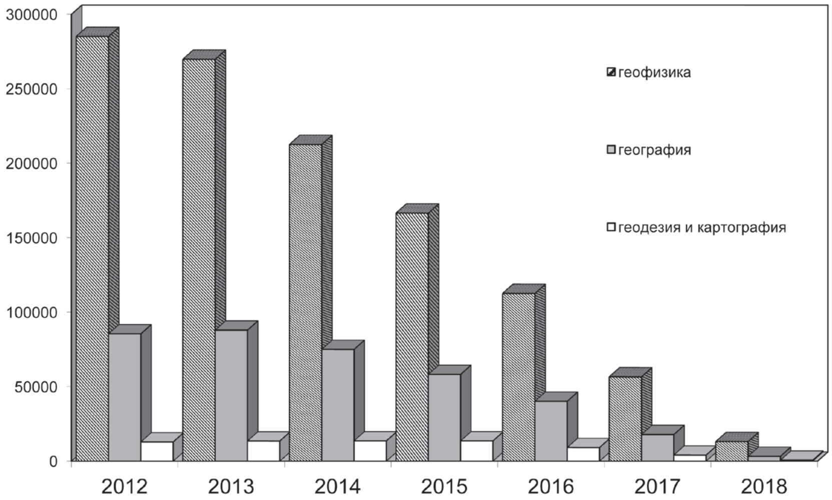

Рис. 2. Динамика цитируемости ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии

Этот факт объясняется в том числе и тем, что результаты геофизических исследований представляют интерес не только для многих направлений наук о Земле, но также и для ряда других естественнонаучных отраслей исследований.

Следует также отметить, что если показатели цитирования для геофизики превышают аналогичные показатели для географии примерно в три раза, то для геодезии и картографии – в 12–20 раз.

Малые значения показателей цитирования в 2018 г. объясняются для рассматриваемых областей исследований, как и для других сфер знаний, известной закономерностью: замедленной реакцией («откликом») мирового научного сообщества на публикации текущего года.

Динамика изменения показателей востребованности результатов исследований представлена на рис. 3.

Как следует из рис. 3, наибольшей востребованностью выделяются результаты исследований по геофизике, наименьшей – в сфере геодезии и картографии. Динамика изменения показателей востребованности для всех трех областей исследований также отличается непрерывным уменьшением их значений: в 2017 г. по сравнению с 2012 г. эти показатели для геофизики и географии уменьшились в 7–8 раз, для геодезии и картографии – примерно в 5 раз.

При этом если ежегодная востребованность итогов исследований по геофизике превышает аналогичные показатели для

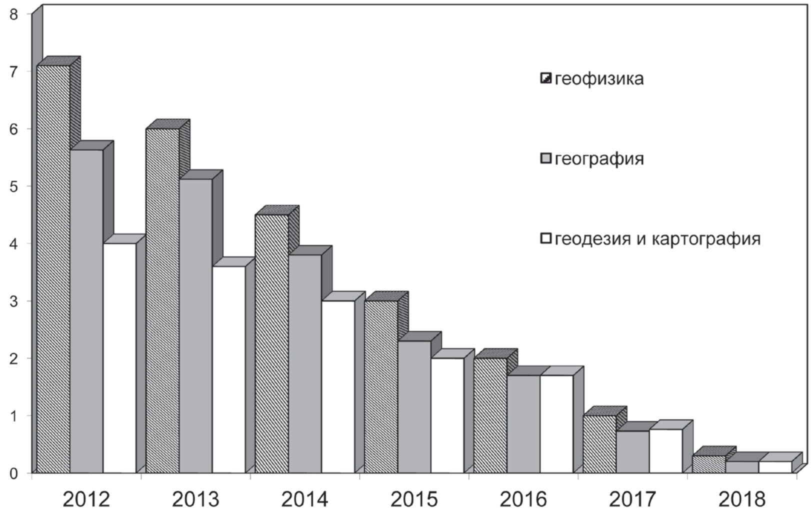

Рис. 3. Динамика востребованности итогов исследований ученых в области геофизики, географии, геодезии и картографии

географии на 15–20%, то для геодезии и картографии – примерно в 1,5 раза.

Невысокие показатели востребованности для всех трех областей исследований в 2018 г. объясняются той же причиной, что и для малых показателей цитирования в этом году: замедленным «откликом» научного сообщества на публикации текущего года.

Заключение

В заключение необходимо отметить, что если по показателям публикационной активности и цитируемости все три рассмотренные отрасли наук уступают химии и физике, лидирующим по этим показателям среди естественнонаучных отраслей знаний, то показатели востребованности для геофизики примерно в 1,5 раза превышают аналогичные показатели для химии и физики, что свидетельствует о повышенной значимости исследований в этой области знаний.

В то же время необходимо отметить, что показатели цитируемости и публикуемости позволяют только в определенной мере оценивать результативность научной деятельности ученых и организаций, являясь одним из компонентов оценки их научной деятельности; но эти показатели не могут служить единственными показателями оценки всей научной деятельности организаций и ученых, ее эффективности, так как лишь квалифицированные эксперты в соответствующей отрасли наук могут оценить эту эффективность после изучения конкретных работ за определенный период.

В работе [5] отмечаются ситуации, когда целесообразно активно применять наукометрические показатели:

– в качестве квалификационного требования к экспертам научных проектов в интересах государственных программ, учреждений и т. п.;
– при формулировании минимальных аттестационных требований к сотрудникам научных и образовательных учреждений, научным руководителям дипломников и аспирантов и т. п.;
– при сравнении отдельных ученых или небольших групп, работающих в одной научной области;
– для выявления наиболее активных в сфере научной деятельности групп, работающих на мировом уровне (путем сравнения их показателей работы с аналогичными показателями зарубежных групп).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-07-00036 А.

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant № 18-07-00036 А.

Литература

1. *Арутюнов В.В., Константинов А.С.* Рейтинговый анализ востребованной геологической научно-технической продукции на рубеже XX–XXI веков // Научно-техническая информация. Сер.1. 2006. № 12. С. 14–19.
2. *Арутюнов В.В.* Методы оценки результатов научных исследований. М.: ГПНТБ, 2010. 50 с.
3. *Арутюнов В.В., Гришина Н.В.* Оценка результативности научной результативности научной деятельности российских ученых: кластерный анализ (на примере области естественнонаучных отраслей науки) // Научные и технические библиотеки. 2018. № 9. С. 77–92.
4. Российский индекс научного цитирования. URL: https://elibrary.ru/querybox.asp?scope= newquery (дата обращения 15 января 2019 г.).
5. *Цветкова В.А.* Система цитирования: где зло, где благо // Научно-технические библиотеки. 20l5. № 1. С. 18–22.

References

1. Arutyunov VV., Konstantinov AS. Rating analysis of the demand for geological scientific and technical products at the turn of the 21st century. Scientific and technical information. Ser. 1. 2006;12:14-19. [In Russ.]
2. Arutyunov VV. Evaluation methods of the scientific research results. Moscow: Russian National Public Library for Science and Technology Publ.; 2010. 50 p. [In Russ.]
3. Arutyunov VV., Grishina NV. Evaluation of the scientific performance effectiveness of Russian scientists. Cluster analysis (by the example of the field of natural sciences) // Scientific and technical libraries, № 9. 2018. P. 77-92. [In Russ.]
4. Russian Science Citation Index. [Internet]. [data obrashcheniya 15 January 2019]. URL: https://elibrary.ru/querybox.asp?scope=newquery [In Russ.]
5. Tsvetkova VA. The citation system. Where is the evil, where is the good. Scientific-technical library. 20l5;1:18-22. [In Russ.]

Информация об авторах

Валерий В. Арутюнов, доктор технических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; Россия Москва, 125993, Миусская пл., д. 6; warut698@yandex.ru

Наталия В. Гришина, кандидат технических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; Россия Москва, 125993, Миусская пл., д. 6; grnat@rambler.ru

Information about the authors

Valery V. Arutyunov, Dr. of Sci. (Computer Science), professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993; warut698@yandex.ru

Nataly V. Grishina, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993; grnat@rambler.ru

УДК 004.421
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-17-31

Метод построения заданной группировки объектов в мультиагентных сетях

Олег М. Махонин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, makhoninom@gmail.com

Михаил В. Филиппов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, filippov.mike@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке метода взаимодействия объектов, входящих в состав некоторой группы, обменивающихся информацией непосредственно друг с другом в отсутствие управления из единого центра. Проведенный в статье обзор предшествующих работ показал ряд имеющихся в этих работах недостатков, например быстрое возрастание времени группировки объектов с увеличением их количества и отсутствие учета возможности столкновений объектов. В данной работе предложен метод группового взаимодействия, учитывающий дистанцирование объектов и выполняющий задачу их группировки в заданные фигуры на плоскости за приемлемое время. В результате динамического контроля расстояния между объектами полностью исключена возможность их столкновения. Рассмотрены два алгоритма определения соседей и предложена оптимизация динамических расчетов для бинарного дерева. Проведен ряд экспериментов по определению времени формирования фигуры и скорости достижения объектами ее границ. Показано, что использование бинарного дерева позволяет существенно сократить время группировки объектов в заданную фигуру по сравнению с обычно используемым алгоритмом полного перебора.

Ключевые слова: группа, алгоритм, метод группового взаимодействия, заданная группировка, БПЛА, фигуры, стая, рой

Для цитирования: Махонин О.М., Филиппов М.В. Метод построения заданной группировки объектов в мультиагентных сетях //Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 17–31. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-17-31

The method of constructing a preassigned grouping of objects in multi-agent networks

Oleg M. Makhonin
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, makhoninom@gmail.com

Mikhail V. Filippov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, filippov.mike@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the development of the method of interaction of objects belonging to a certain group, which exchange information directly with each other without the control from a single center. The review of previous works conducted in the article shown a number of deficiencies in those works such as rapid increase in the time necessary for grouping the objects because of their quantity growth and the lack of consideration for the possibility of the objects collisions. The paper proposes a group interaction method that takes into account the distancing of objects and performs the task of grouping them into preassigned planar figures in an acceptable time. As a result of dynamic control of the distance between objects the possibility of their collision is completely excluded. Two algorithms for determining neighbors are considered and optimization of dynamic calculations for a binary tree is proposed. Several experiments were carried out to determine the time for the formation of a figure and the speed at which objects reach its borders. It is shown that the use of a binary tree can significantly reduce the time of grouping the objects into a preassigned figure in comparison with the commonly used full enumeration algorithm.

Keywords: group, algorithm, group interaction method, preassigned grouping, UAV (unmanned aerial vehicle, drone), figures, flock, swarm

For citation: Makhonin OM., Filippov MV. The method of constructing a preassigned grouping of objects in multi-agent networks. *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series.* 2019;2:17-31. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-17-31

Введение

Существенное уменьшение размеров электронных устройств и повышение вычислительных мощностей позволяют создавать миниатюрных роботов. Каждый из них по отдельности не может достичь поставленной цели, но, действуя вместе, они способны существенно ускорить решение многих вероятностных задач, когда заранее неизвестны четкий алгоритм и число правильных решений.

При наличии большего числа объектов они могут объединяться в группы и управляться как централизованно, так и по отдельности, обходя препятствия и достигая цели с соблюдением каких-либо условий. Группировка объектов может использоваться для более качественного мониторинга местности и оценки ситуации, обладая при этом большей надежностью, чем отдельные устройства. Особое внимание уделено одноранговым группам, т. е. объектам, не имеющим централизованного управления, а также алгоритмам построения фигур для перемещения на местности [1].

Под группой обычно понимают некоторую совокупность независимых робототехнических комплексов, которые подчиняются определенным правилам построения и способны выдерживать свое место в строю на прямолинейных и криволинейных участках передвижения всей группы в целом, а также реагировать на изменения окружающей среды и взаимодействовать друг с другом для решения единой целевой задачи [2]. В настоящее время разработан целый спектр алгоритмов в этой области, но большинство из них основаны на централизованном управлении с наземной станции. При этом сами аппараты отрабатывают только команды, не имея при этом собственных алгоритмов анализа окружающего пространства и положения соседей.

В данной статье приведен метод, позволяющий объединять объекты, находящиеся в одноранговой сети, в определенные заданные фигуры. Представленный метод отличается более высоким быстродействием, а также позволяет предотвращать столкновения объектов.

Обзор существующих методов

В одной из первых работ по тематике мультиагентных систем Д. Кеннеди и Р. Эберхарт предложили метод объединения объектов различной природы в стаю, получивший название «роевой алгоритм» [3]. В своей статье эти авторы опирались на имитационную модель Рейнольдса [4]. Согласно этой модели, расстояния между объектами стаи выдерживаются за счет обмена информацией между соседними частицами и коррекции их поведения с учетом данной информации.

Рассмотрим более подробно основные идеи работы [3]. Положение объекта задается координатами на плоскости x = (x_i, x_j) и вектором скорости $v = (v_i , v_j)$. В начальный момент времени значения этих величин определяются случайным образом. В каждый следующий момент времени для всех частиц вычисляется значение функции расстояния до точки, заданной в качестве конечной цели движения объектов. Значение наилучшего из этих решений среди соседей (*pbest)* и общего решения для всех частиц (*gbest)* также сохраняются для каждого объекта [5]. С учетом указанного выше для компонент вектора скорости записывается следующее выражение:

$$v_i = v_i + a_1 * rnd(\,) * (pbest_i - x_i) + a_2 * rnd(\,) * (gbest_i - x_i), \tag{1}$$

где a_1, a_2 – постоянные ускорения, функция $rnd(\,)$ – определяет случайное число в интервале [0,1] согласно равномерному закону распределения.

Найденное значение скорости v позволяет определить последующее положение объекта $x = x + v$. Данная процедура выполняется на каждой итерации.

В работе [6] предложна модификация классического алгоритма Д. Кеннеди и Р. Эберхарта. В этой работе был введен так называемый коэффициент инерции w, определяющий баланс между глубиной исследования пространства и скоростью сходимости алгоритма. С учетом коэффициента инерции выражение (1) приобрело следующий вид:

$$v_i = w * v_i + a_1 * rnd(\,) * (pbest_i - x_i) + a_2 * rnd(\,) * (gbest_i - x_i). \tag{2}$$

Выбор коэффициента w влияет на скорость сходимости алгоритма к заданному решению. Случай $w > 1$ приводит к увеличению скоростей объектов и их разлету в разные стороны. Наоборот, при $w \in (0,1)$ скорости частиц со временем уменьшаются. В результате сходимость алгоритма зависит от выбора параметров a_1, a_2.

Данный метод чаще всего применяется для оптимизации непрерывных нелинейных функций. Метод является итерационным, и в итоге все частицы стремятся к одной лучшей точке.

В 2014 г. коллективу ученых из Гарвардского университета удалось создать самоорганизующуюся группу из 1024 роботов [7]. Они умеют выстраиваться в различные сложные двумерные фигуры, однако делают это довольно долго. На построение одной фигуры у них уходит несколько часов. В основе метода построения лежит «муравьиный алгоритм». Он максимально «заточен» под конкретное техническое решение мини-робота на вибромоторах и не может быть масштабирован на другие классы роботов, например БПЛА, где требуется постоянная переоценка окружающего пространства. Это существенно ограничивает круг решаемых задач.

В данной работе предлагается метод на основе одной из последних модификаций Кеннеди и Эберхарта, учитывающий дистанцирование объектов на определенном расстоянии друг от друга и выполняющий их заданную группировку.

Описание алгоритма

В классическом виде алгоритмы группового взаимодействия допускают столкновения частиц, а скорость каждой частицы определяется как средняя от скоростей соседних частиц. Такое поведение недопустимо при работе с реальной группой роботов [8]. В процессе разработки данного метода были в первую очередь изучены различные варианты уклонения частиц от сближения. Наиболее подходящее решение было найдено в изменении вектора скорости точки при сближении на противоположный. Внешне это похоже на то, как два самолета разлетаются в разные стороны [9]. Применимо к задаче с БПЛА, это является наиболее оптимальным решением. Формулами это выражается следующим образом:

$$x_1 = -x_1 \qquad x_2 = -x_2$$
$$y_1 = -y_1 \qquad y_2 = -y_2, \tag{3}$$

где x_1 , x_2 – координаты x векторов 1-й и 2-й частицы, соответственно;
y_1, y_2 – координаты y векторов 1-й и 2-й частицы соответственно.

На каждой итерации алгоритма проверяется, есть ли частицы, которые сблизились больше разрешенной дистанции. Для каждой такой пары частиц коррекция направления движения определяется следующим образом.

В качестве базового вектора разброса частиц берется вектор разброса частиц a

$$a = \{\mathrm{X}_{i,t,1} - \mathrm{X}_{i,t,2}, \mathrm{X}_{j,t,1} - \mathrm{X}_{j,t,2}\}, \tag{4}$$

где $X_{i,t,k}$ – i-я координата k-ой частицы в момент времени t.
Далее осуществляется нормализация вектора a:

$$e = \frac{a}{|a|};\ |a| = \sqrt{d_i^2 + d_j^2}\ ;\ dist = \frac{|\mathrm{a}| - dmin}{2}, \tag{5}$$

где e – нормализованный вектор a;
d_i, d_j – компоненты вектора a;
dist – дистанция разброса частиц;
dmin – минимальное допустимое расстояние сближения.

Координаты положения второй частицы изменяются с учетом полученного единичного вектора e:

$$X_{i,t+1,2} = X_{i,t,2} + e_i * dist\ ;\ X_{j,t+1,2} = X_{j,t,2} + e_j * dist. \tag{6}$$

Для первой частицы изменение координат осуществляется аналогичным образом, с той лишь разницей, что берется зеркальный вектор e:

$$X_{i,t+1,1} = X_{i,t,1} - e_i * dist\,; \;\; X_{j,t+1,1} = X_{j,t,1} - e_j * dist\,. \qquad (7)$$

Основными критериями эффективности алгоритмов группового взаимодействия являются число аппаратов, которые могут одновременно выполнять поставленную задачу, находясь при этом в рое, и вычислительные затраты бортового компьютера.

Для решения задачи объединения объектов в заданную фигуру необходимо определить алгоритм перебора частиц, который позволит обеспечить стабильную работу метода на большом числе агентов в сети [10]. Одним из основных параметров при построении заданной группы является расстояние между частицами:

$$d_{k,l} = \sqrt{(X_{t,k} - X_{t,l})^2 + (Y_{t,k} - Y_{t,l})^2}\,, \qquad (8)$$

где $d_{k,l}$ – расстояние между k-й и l-й частицами;
$X_{t,k}$, $Y_{t,k}$ – координаты X и Y k-й частицы в момент времени t соответственно.

Другим важным параметром для каждой частицы является радиус обзора, который определяет соседей частицы, оказывающих влияние на ее движение. Эти параметры оказывают существенное влияние на скорость сходимости алгоритма группировки и число допущенных столкновений.

В самом простом исполнении происходят перебор всех частиц, вычисление расстояния до каждой из них и определение соседей. Подобный подход требует большого числа вычислений и существенно ограничивает множество одновременно находящихся в группе частиц.

Оптимизация алгоритма перебора частиц

Для сокращения количества вычислений в данной работе предлагается использовать алгоритм построения бинарного дерева. В процессе реализации этого алгоритма пространство частиц разбивается на ячейки. На положения каждой частицы оказывают влияние только частицы, которые находятся в одной с ней ячейке (соседи), а не все подряд. Во избежание сближения на расстояние, менее допустимого, осуществляются перебор всех частиц в ячейках в пределах радиуса обзора и проверка дистанции между исходной и каждой из них.

Если происходит сближение между любыми двумя частицами, то применяется описанный выше в разделе 2 алгоритм ухода от столкновений.

Главная задача заключается в том, чтобы поддерживать в соответствующем состоянии списки соседних частиц. Для этого определяются расстояния между i-й и соседними частицами согласно формуле:

$$d_{k,l}^{b_i} = \sqrt{(X_{i,t,k} - X_{i,t,l})^2 + (X_{j,t,k} - X_{j,t,l})^2}, \qquad (8)$$

где b_i – список ячеек бинарного дерева, находящихся в пределах радиуса обзора i-й частицы.

Каноническое определение расстояния между двумя точками, с учетом принадлежности их к списку частиц заданной ячейки, является наиболее правильным решением данной задачи.

Бинарное дерево поиска

Бинарное дерево – это иерархическая структура данных, в которой каждый узел имеет значение и ссылки на левого и правого потомка. Узел, находящийся на самом верхнем уровне, называется корнем. Узлы, не имеющие потомков (оба потомка которых равны NULL), называются листьями.

Бинарное дерево поиска – это бинарное дерево, обладающее дополнительными свойствами: значение левого потомка меньше значения родителя, а значение правого потомка больше значения родителя для каждого узла дерева, т. е. данные в бинарном дереве поиска хранятся в отсортированном виде. После каждой операции вставки нового или удаления существующего узла отсортированный порядок дерева сохраняется. При поиске элемента сравнивается искомое значение с корнем. Если искомое больше корня, то поиск продолжается в правом потомке корня, если меньше, то в левом, если равно, то значение найдено и поиск прекращается.

Построение бинарного дерева производится на основе связного списка. Если точка выходит из узла, то она из этого узла удаляется, а в узле, в который точка перешла, – добавляется [11]. Таким образом, каждый узел дерева содержит список точек внутри него, и поэтому можно очень быстро проверить всех соседей. Настраиваемым параметром является размер ячейки бинарного дерева. Он выбирается экспериментально с условием минимизации вычислений и расхода памяти.

В структуре бинарного дерева используется два внутренних массива. Первый – это массив узлов, а второй – матрица указателей на узлы для доступа по номеру столбца и строки. Второй массив нужен для того, чтобы непосредственно получить нужный узел для точки [12]. Кроме того, каждый узел содержит ссылки на соседние узлы дерева, соответственно имеется доступ также и к соседям. Такая иерархия позволяет за одну операцию выделить соседей для точки в радиусе обзора, чтобы проверить сближение.

Симуляция с учетом сближения без бинарного дерева даже для 1000 точек работает очень медленно из-за большого числа переборов на каждом шаге. Фактически для 999 точек проверяется 999 дистанций и выполняется 998 000 проверок.

С целью дальнейшей минимизации числа вычислений в работе предложено перенести динамические расчеты в дереве на этап предварительных расчетов. Например, вместо того чтобы для каждой ячейки динамически определять все соседние видимые ячейки, можно их заранее рассчитать и записать в массив.

Для каждой ячейки дерева на этапе генерации исходя из радиуса обзора рассчитываются соседние видимые ячейки. Расчет производится следующим образом: если дистанция от центра текущей ячейки до центра соседней ячейки меньше или равна радиусу обзора, то ячейка считается видимой из текущей и сохраняется в ее внутреннем списке. Этот расчет выполняется для каждой ячейки на этапе генерации дерева, а не во время процесса моделирования. Проверяются все соседние ячейки для текущей – левая, верхняя, правая, нижняя – и потом рекурсивно от этих четырех соседей далее, пока есть ячейки внутри радиуса видимости. Таким образом, если радиус обзора меньше размера самой ячейки, то из нее соседние не видно, а значит, могут происходить коллизии.

Задача поиска k-ближайших соседей (NN-задача)

Базовые обозначения:

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множество исходных объектов

$N = |A|$ – мощность множества объектов

S – множество объектов запроса

$dist(,) \in R$ – мера близости

Задача поиска k-ближайших соседей может быть сформулирована следующим образом: для объекта запроса “ $s \in S$ найти подмножество $B \subseteq A$ объектов данных такое, что

$$|B| = k,\ \forall b \in B\ \forall c \in A \setminus B : dist(s,b) \le dist(s,c). \tag{9}$$

При $k \geqslant |A|$ ответом является все множество исходных объектов данных A, в алгоритме принимаем, что $k < |A|$.

Если существует несколько равноудаленных от точки запроса s объектов данных, то не все они попадают в ответ k NN-задачи. Какие именно объекты попадают, а какие нет, зависит от конкретной реализации, что может порождать неоднозначное поведение алгоритмов, опирающихся на результаты поиска соседей. Для раз решения подобных неоднозначностей возможна следующая формулировка задачи поиска k*-ближайших соседей, расширяющая задачу поиска k-ближайших соседей: для объекта запроса $s \in S$ найти минимальное подмножество $B \subseteq A$ объектов данных такое, что

$$|B| \geq k, \ \forall b \in B \ \forall c \in A \setminus B : dist(s,b) \leq dist(s,c). \tag{9}$$

Реализация алгоритма заданной группировки

После решения задачи определения соседей необходимо организовать движение частиц таким образом, чтобы они заняли место внутри заданной фигуры. В качестве базовых были выбраны две фигуры – окружность и квадрат. Подзадача объединения объектов в заданную фигуру решается в зависимости от выбранной конфигурации. В основе лежит так называемая целевая функция. Ее значение оказывает непосредственное влияние на вектор перемещения частицы. В каноническом алгоритме эта функция рассчитывает наилучшее положение в пространстве в следующий момент времени только на основе информации о соседях данной частицы. В модифицированном нами методе учитывается направление на центр заданной фигуры. Взаимное определение положения частицы и окружности определяется путем вычисления расстояния между их центрами:

$$R = \sqrt{(O_i - P_i) + (O_j - P_j)^2}, \tag{10}$$

где O_i – i-я координата центра окружности;

P_i – i-я координата центра частиц.

Если расстояние между частицами оказывается меньше радиуса заданной окружности, то можно сделать вывод о том, что частица находится внутри нее.

Случай квадрата можно достаточно просто модифицировать для многоугольника. Таким образом, достигается универсальность выбора конфигураций для разработанного метода. Стоит также отметить, что его можно распространить и на трехмерное пространство. В формулах добавится анализ по третьей координате. Это позволит существенно переработать алгоритм дистанцирования. Например, можно будет разнести два объекта по высоте, используя двумерный алгоритм, либо осуществить более сложный маневр.

Для разных форм многоугольников определение относительного положения точки (внутри или вне многоугольника) имеет свои особенности. Для уменьшения объема вычислений на каждом шаге выполняется предварительная обработка, что дает возможность быстрее определить принадлежность точек одному и тому же многоугольнику.

В данной работе было решено использовать метод трассировки луча [13]. Он состоит из трех шагов:

- из тестируемой точки выпускается луч либо в заранее заданном, либо в произвольном направлении;
- производится подсчет числа пересечений с многоугольником;
- если число пересечений четное, точка расположена снаружи, иначе – внутри.

В настоящей работе для учета частного случая пересечения лучом вершины многоугольника был использован следующий прием. Предполагалось, что такие вершины расположены выше или ниже луча на бесконечно малую величину, т. е. пересечения нет. Поэтому пересечение луча с ребром происходит только в том случае, если концы ребра лежат по разные стороны от луча.

Алгоритмическая сложность этого алгоритма O (log n), где n – число ребер в многоугольнике. Обозначить $res_i = 1$, если луч пересекает i-ю сторону многоугольника, $res_i = 0$ в противном случае. В результате условие нахождения частицы внутри заданного многоугольника можно записать следующим образом:

$$(\sum_{i=1}^{N} res_i)\%2 \neq 0, \tag{11}$$

где N – число вершин многоугольника, % – деление по модулю 2.

Проведение численных экспериментов

По результатам выполненной работы создан программный продукт, реализующий описанные выше алгоритмы и позволяющий группировать заданное число частиц в определенную фигуру. Каждая частица характеризуется положением в пространстве, размером и радиусом видимости. Кроме того, с помощью данного

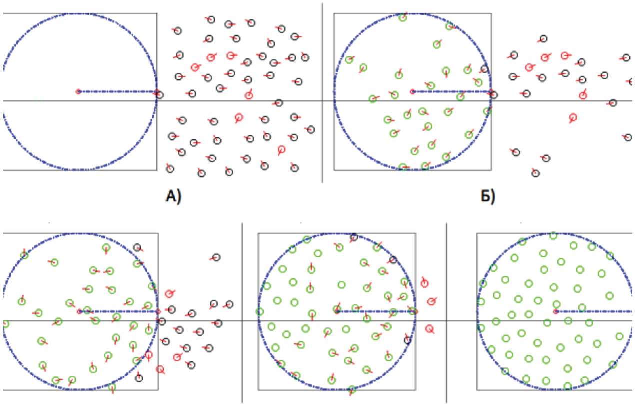

Рис. 1. А–Д. Последовательность конфгураций частиц от начального состояния (А) до конечного (Д)

программного обеспечения (ПО) выполнены численные эксперименты по группировке частиц внутри заданной окружности для получения статистических характеристик разработанного метода.

Основным показателем работы алгоритма является время формирования фигуры. За эту величину принят период, в течение которого внутри фигуры формируется устойчивая коллекция неподвижных точек примерно одинакового числа. Если в течение 5–10 итераций число точек внутри фигуры варьирует незначительно, то это значение можно считать устойчивым. Пример построения заданной группировки окружности приведен на рис. 1.

Была также исследована зависимость времени формирования фигуры от числа частиц двумя методами – полным перебором частиц и с помощью бинарного дерева. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Обход соседних частиц при помощи бинарного дерева дает существенный выигрыш по времени в случае работы с числом частиц больше 500.

Второй интересующий нас показатель – это среднее время достижения частицей границ фигуры. Многие частицы могут в фигуру не попасть, если включено дистанцирование с большим минимально допустимым расстоянием. В таком случае они будут отбрасываться более близкими точками. Средняя скорость достижения вычислялась как среднее для всех точек, попавших внутрь фигуры. На рис. 3 представлен график зависимости времени достижения частицей границ фигуры от числа частиц для двух методов.

Представленные на рисунках 2 и 3 графики позволяют сделать вывод о том, что использование бинарного дерева для решения поставленной задачи приводит к существенному уменьшению временных затрат по сравнению с обычным перебором.

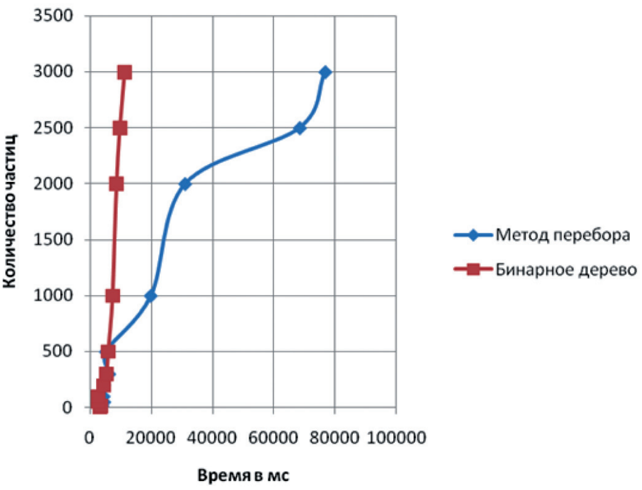

Рис. 2. Зависимость времени построения фигуры от числа частиц

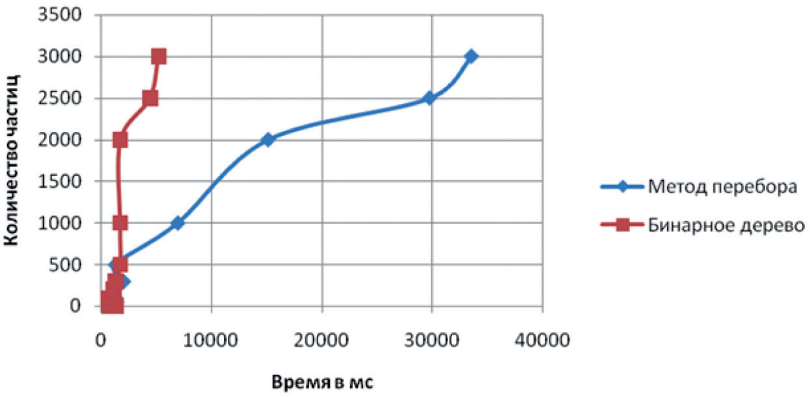

Рис. 3. Среднее время достижения частицей границ фигуры в зависимости от числа частиц

Заключение

Разработанный метод решает актуальную задачу построения заданной группировки объектов в мультиагентных сетях. При помощи полученного программного комплекса можно продолжать исследования метода и добавлять различные модификации.

Выполнен анализ существующих вариантов реализации группового взаимодействия и проведен ряд исследований. Выяснено, что реализация поиска соседей методом разбиения пространства на ячейки бинарного дерева позволяет на порядок увеличить число объектов, способных формировать мультиагентную сеть и выполнять при этом заданную группировку.

Сходимость алгоритма гарантируется в случае физической возможности размещения внутри фигуры заданного числа объектов. В противном случае на границе фигуры будут происходить колебания агентов, которым не хватило места внутри. Подбор их числа для определенной сходимости осуществляется сравнением совокупной площади, занимаемой всеми объектами, и площади фигуры. Несложные вычисления выгодно выделяют разработанный метод на фоне существующих роевых алгоритмов, так как для большинства из них сходимость не определена.

Еще одним достоинством метода является тот факт, что пересчет координат объектов может происходить как по синхронной, так и по асинхронной схеме. В первом случае это означает, что обновление координат частиц выполняется только после определения текущих скоростей всех N частиц, а во втором – что расчет новых координат части производится до завершения указанных вычислений. Это позволяет использовать разработанный метод в реальных условиях построения мультиагентных сетей, в которых нет возможности организовать синхронизирующий систему единый таймер и время тратится еще и на обмен данными между агентами.

Литература

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009. 280 с.
2. *Морозова Н.С.* Управление движением строя в мультиагентных системах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 123 с.
3. *Kennedy J., Eberhart R.C.* Particles swarm optimization // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, 1995. P. 1942–1948.
4. *Rubenstein M., Christian A., Radhika N., Nagpal Kilobot R.* A low cost scalable robot system for collective behaviors // Robotics and Autonomous Systems. 2012. Vol. 62 (7). P. 966–976.

5. *Морозова Н.С.* Управление движением строя для мультиагентной системы, моделирующей автономных роботов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 4. С. 23–31.
6. *Спирина А.В.* Исследование эффективности работы алгоритма PSO. URL: http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/7491/s021-050.pdf (дата обращения 22 июня 2019).
7. *Cummings M.L.* Operator Interaction with Centralized versus Decentralized UAV Architectures. URL: http://web.mit.edu/aeroastro/labs/halab/papers/UAV_ARCH_2013.pdf (дата обращения 22 июня 2019).
8. *Иванов Д.Я.* Решение строевой задачи в группе беспилотных квадрокоптеров // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 8 (157). С. 138–147.
9. *Будаев Д.С., Вощук Г.Э., Гусев Н.А., Майоров И.В., Мочалкин А.Н.* Особенности построения программно-аппаратного комплекса для согласования выполнения задач группой БПЛА на базе мультиагентных технологий и сетецентрического подхода // Группа компаний «Генезис знаний». URL: http://www.kg.ru/wp-content/uploads/2016/03/04 (дата обращения 22 июня 2019).
10. *Иванов Д.Я.* Построение формаций в группах квадрокоптеров с использованием виртуального строя // Труды XII Всерос. совещания по проблемам управления «ВСПУ-2014». М., 2014. С. 1971–1978.
11. *Абрамян М.Э.* Бинарные деревья. Задачи, решения, указания. Ростов н/Д: ЮФУ, 2009. С. 69
12. *Пышкин Е.В.* Структуры данных и алгоритмы: реализация на C/C++. СПб.: СПГПУ, 2009. С. 143.
13. *Тюкачев Н.А.* Определение принадлежности точки многоугольнику общего вида методом трассировки луча // Вестник ТГТУ. 2009. Том 15. С. 638–652.

References

1. Kalyaev IA., Gaiduk AR., Kapustyan SG. *Collective control models and algorithms in groups of robots*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2009. 280 p. [In Russ.]
2. Morozova NS. *Line-up motion control in multi-agent systems* [dis. ... kand. fiz.-mat. nauk.]. Moscow, 2015. 123 p. [In Russ.]
3. Kennedy J., Eberhart RC. Particles swarm optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. Piscataway, NJ, 1995. P. 1942-48.
4. Rubenstein M., Christian A., Radhika N., Nagpal Kilobot R. A low cost scalable robot system for collective behaviors. *Robotics and Autonomous Systems*. 2012;62: 966-76.
5. Morozova NS. Line-up motion control in multi-agent system for simulation of autonomous robots. *Moscow University Bulletin. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*. 2015; 4: 23-31. [In Russ.]
6. Spirina AV. *The PSO Algorithm Performance Study*. [Internet]. [data obrashcheniya 22 June 2019]. URL: http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/7491/s021-050.pdf [In Russ.]
7. Cummings ML. *Operator Interaction with Centralized versus Decentralized UAV Architectures* [Internet]. [data obrashcheniya 22 June 2019].URL: http://web.mit.edu/aeroastro/labs/halab/papers/UAV_ARCH_2013.pdf
8. Ivanov DYa. The solution of the line-up task in the group of unmanned quadrocopters. *News of SFEDU. Technical science*. 2014;8:138-147 [In Russ.]

9. Budayev DS., Voschuk GE., Gusev NA., Mayorov IV., Mochalkin AN. *Features of building a hardware and software complex for coordination of tasks implementation by a group of UAVs based on multi-agent technologies and the network-centric approach*. Group of companies "Genesis of knowledge" [Internet]. [data obrashcheniya 22 June 2019]. URL: www.kg.ru/wp-content/uploads/2016/03/04 (In Russ.)
10. Ivanov DYa. Formations in groups of quadrocopters using the virtual line-up. V: *Proceedings of 12th All-Russian conference meeting on management issues VSPU-2014*. Moscow, 2014. p. 1971-78 [In Russ.]
11. Abramyan ME. Binary Trees. *Problems, solutions, instructions*. Rostov-na-Donu: SFEDU Publ., 2009. 69 p. [In Russ.]
12. Pyshkin EV. *Data structures and algorithms: C/C++ realization*. Saint Petersburg: SPGPU Publ.; 2009. 143 p. [In Russ.]
13. Tyukachev NA. Determination of a point affiliation to a general polygon by the ray tracing method. *TGTU Bulletin*. 2009;15:638-52 [In Russ.]

Информация об авторах

Олег М. Махонин, студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; makhoninom@gmail.com

Михаил В. Филиппов, кандидат технических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; filippov.mike@mail.ru

Information about the authors

Oleg M. Makhonin, student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman str., Moscow, Russia, 105005; makhoninom@gmail.com

Mikhail V. Filippov, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman str., Moscow, Russia, 105005; filippov.mike@mail.ru

УДК 004.738.5:34
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-32-42

Маршрутизация и IP для обеспечения правового регулирования интернет-отношений

Анна К. Жарова
Институт государства и права РАН,
Москва, Россия, anna_jarova@mail.ru

Аннотация. В статье анализируются законодательство в сфере определения государственной юрисдикции в Интернете, в том числе связанное с обеспечением устойчивого функционирования российского Интернета через создаваемую национальную систему маршрутизации интернет-трафика, а также практика регулирования интернет-отношений, применяемая Роскомнадзором. Рассмотрена эффективность применения IP и других технологий для определения места совершения юридических действий в Интернете. Сделан вывод о том, что правовое обеспечение информационной безопасности без использования информационных технологий и их включения в нормативные правовые акты не позволяет достичь эффективного правового регулирования интернет-отношений.

Ключевые слова: информационная безопасность, маршрутизация, IP-адрес, нормативное правовое регулирование, территория, Интернет

Для цитирования: Жарова А.К. Маршрутизация и IP для обеспечения правового регулирования интернет-отношений // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 32–42. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-32-42

Routing and IP to ensure legal regulation of relationships in cyberspace

Anna K. Zharova
Institute of State and Law of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, anna_jarova@mail.ru

Abstract. The article analyzes the legislation in the sphere of determining state jurisdiction on the Internet, including those related to ensuring the stable functioning of the Russian Internet through the national routing system for Internet traffic being created, as well as the practice of regulating Internet relations applied by Roscomnadzor. The effectiveness is considered of the use of IP and other technologies to determine the place of legal action on the Internet. The conclusion is that the legal provision of information security without the use of information technologies and their inclusion in regulatory legal acts does not allow achieving an effective legal regulation of Internet relations.

Keywords: information security, routes, IP-address, legal regulation, territory, Internet

For citation: Zharova AK. Routing and IP to ensure legal regulation of relationships in cyberspace. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" series.* 2019;2:32-42. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-32-42

Мы уже не представляем свою жизнь без использования Интернета: он позволяет объединять людей в социальные группы, создавать новые интернет-отношения как внутри государства, так и за его пределами, служит инструментом для реализации функций государства. Сеть, объединяя различных субъектов по всему миру, создает возможности осуществления законных и противозаконных действий. В связи с этим перед законодателем встают вопросы о наиболее эффективном правовом регулировании возникающих интернет-отношений.

Разработанный в 1969 г. Управлением перспективных исследований и разработок США ARPANET был предназначен для объединения структур вооруженных сил США. В настоящее время это уже многоуровневая, многофункциональная, трансграничная структура, называемая Интернетом. В такой сложной информационной инфраструктуре, как Интернет, возникают отношения между различными субъектами. В реальной среде закон во многом локален и определяет юрисдикцию внутри конституционных границ конкретного государства. Однако при распространении действия закона в пространстве на интернет-отношения возникают вопросы о юрисдикции в Интернете и правомерности использования термина «территория» для правового регулирования интернет-отношений. Существуют различные точки зрения на решение данных вопросов. Так, М.А. Рожкова считает, что не существует проблем в распространении действующего законодательства на интернет-отношения, хотя, как пишет автор, это потребует внесения соответствующих корректив в существующие нормативные правовые акты [1].

В зарубежной законодательной практике для описания отношений, возникающих на базе информационных систем и компьютерных технологий, применяется термин «кибепространство», которое, как пишут G.I. Zekos и T. Amvrosia-Komotini, может быть охарактеризовано как объединение множества частных лиц средствами электронных коммуникаций [2].

Несмотря на кажущуюся виртуальность Интернета, отношения в интернет-среде являются совершенно реальными, поскольку в Сети обращается информация реального мира. С технологической точки зрения Интернет является системой множества сетевых протоколов во множестве локальных сетей, а с социальной точки зрения Интернет – средство коммуникации пользователей, находящихся под действием различных государственных юрисдикций. Функционирование Сети обеспечивается взаимодействием огромного количества централизованных отдельных сетей, создающих децентрализованную среду связи и коммуникации. Следовательно, главная особенность Интернета – это функционирование на логическом, а не на географо-территориальном уровне.

Исследование особенностей технологического функционирования Интернета позволяет ответить на вышеперечисленные вопросы о территориальности и эффективности распространения государственных законов на отношения, формируемые в отдельной государственной локальной сети.

Х.К. Лемма считает, что к государственной территории национальные сегменты Сети можно отнести лишь в аспекте теории компетенции, но в то же время государственная власть в пределах определенной национальной территории глобальной сети не имеет абсолютного характера [3]. В качестве примера можно привести объединения субъектов, каждый из которых принадлежит к различным государственным сегментам Сети, в то время как само объединение невозможно отнести ни к одной из территорий.

По мнению М.С. Дашян, статус Интернета можно определить как неопределенный международно-правовой статус, и попытки ряда государств установить административный контроль в их отношении позволяют причислить Интернет к территориям со смешанным правовым режимом наравне с реками, проливами, территориальными водами прибрежных государств, исключительными экономическими зонами и континентальными шельфами прибрежных государств [4]. В этой позиции проявляется подход, принятый в международном праве, когда под территорией понимается все пространство планеты Земля и относительно каждой конкретной территории устанавливается свой международный режим. Например, к «территориям с международным режимом относятся открытое море, пространство над ним и морское дно за пределами континентального шельфа государств. Кроме того, международный режим может устанавливаться в отношении отдельных территорий или их частей в соответствии с международными договорами» [5].

Одной из проблем в сфере интернет-отношений является определение территории, на которой совершено юридическое действие или произошло юридическое событие. От ее решения зависит, право какого государства применимо для регулирования возникших отношений. А.А. Стрельцов считает, что ИКТ-среда есть юридическая фикция, «заключающаяся в том, что соответствующая совокупность организационных и технических средств рассматривается как составляющая территории государства» [6].

С одной стороны, Интернет не имеет контролирующего органа и не подвержен централизованному управлению, с другой стороны, США заявили, что среди перечня санкций, принимаемых против России, есть отключение ее от Интернета [7]. Таким образом, возникает вопрос: как же это возможно? Все объясняется тем, что под юрисдикцией США находятся 11 из 18 мировых операторов корневых серверов, которые являются опорными для управления функционированием Интернетом. Его функционирование осуществляется путем объединения многочисленных компьютеров в сети – это и определяет, что сосредоточение их в руках одного конкретного субъекта позволяет ему становиться контроллером функционирования всей Сети. Функционирование осуществляется на разработанном «общем технологическом языке» и «сетевых протоколах», которые понятны технологиям и позволяют различным операционным системам общаться друг с другом.

Хотя, конечно, сосредоточение в руках конкретного субъекта основных корневых серверов является риском неустойчивого функционирования Сети на территории других государств, это не является чем-то технологически нерешаемым и непреодолимым.

Доменное имя является неотъемлемой частью технологии Интернета и значимой частью интернет-адреса, использование которого также определено протоколами, определяющими путь пакетов в Интернете.

Так, например, для определения устройства, с которого произошел выход человека в Сеть, или места совершения юридически значимого события зачастую используется доменное имя. На этой основе работает Роскомнадзор. Так, приказом Роскомнадзора от 11 февраля 2019 г. № 21 «Об утверждении Порядка идентификации информационных ресурсов в целях принятия мер по ограничению доступа к информационным ресурсам»[1] определяется, что «идентификация осуществляется по сетевому адресу, и/или доменному имени, и/или указателю страницы сайта в сети Интернет».

Однако в научной литературе встречается мнение, что такой метод неэффективен для определения местоположения устройства, с которого произошел выход в Сеть [7]. Во-первых, существуют различные технологии, изменяющие истинное доменное имя и его связь с территорией определенного государства. Эффективная система доменных имен будет функционировать успешно только с точки зрения технологии и управления. Но с точки зрения нормативного правового регулирования данный метод будет давать сбои.

Во-вторых, если связывать доменное имя с территорией и соответственно, с законом государства, то для таких доменных расширений, как .com, .org, .net и др., невозможно определить право, подлежащее применению к отношениям, возникающим в данных доменных зонах. Этот тезис поддерживает А.Г. Дейнеко [8].

С одной стороны, А.Г. Дейнеко прав, если не принимать во внимание, что юридическое событие под доменным именем происходит не само по себе, а связано с серверами, которые являются аппаратно-программной реализацией интернет-технологии и размещены на территории определенной страны. В таком случае юридические события, происходящие под вышеуказанными доменами общего назначения (.com, .org, .net и др.), привязаны к конкретным серверам и, соответственно, подчиняются законодательству данного государства.

Кроме того, существуют примеры государств, которые для преодоления неопределенности в правовом регулировании интернет-отношений прямо указывают всем субъектам, осуществляющим деятельность в Интернете, перевести все свои технологии в национальную интернет-зону.

Например, в Указе Президента Республики Беларусь от 4 февраля 2010 г. № 60 «О переводе всех участников интернет-отношений в белорусскую зону»[2] предусмотрено, что с 1 июля 2010 г. деятельность по реализации товаров, выполнению работ, оказанию

---

[1] Официальный интернет-портал правовой информации. URL: http://www.pravo.gov.ru (дата обращения 11 мая 2019).

[2] Национальный центр правовой информации Республики Беларусь. URL: http://pravo.by/main.aspx?Guid=3871&p0=P31000060&p2={NRPA} (дата обращения 11 мая 2019).

услуг на территории Беларуси с использованием информационных сетей, систем и ресурсов, имеющих подключение к Интернету, осуществляется юридическими лицами, их филиалами и представительствами, созданными в соответствии с законодательством республики, с местонахождением в республике, а также индивидуальными предпринимателями, зарегистрированными в Беларуси, с использованием информационных сетей, систем и ресурсов национального сегмента сети «Интернет», размещенных на территории республики и зарегистрированных в установленном порядке.

Помимо протоколов доменных имен, распространение информации в локальной сети подчиняется правилам маршрутизации. Следовательно, связь локальных сетей регулируется рядом правил, определяющих устройства, через которые информация может перемещаться по сети, а также набором технологических характеристик сети. Таким образом, решение проблемы правового регулирования интернет-отношений связано с разработкой надлежащих правовых норм, которые будут учитывать технологические особенности взаимодействия интернет-технологий, отвечающих за распространение информации, – маршрутизаторов.

Так, 16 апреля 2019 г. в третьем чтении принят Федеральный закон «О внесении изменений в некоторые законодательные акты Российской Федерации»[3], который связывает обеспечение устойчивого функционирования российского Интернета через создаваемую национальную систему маршрутизации интернет-трафика. Это позволит облегчить правовое регулирование интернет-отношений и определение географической зоны совершения юридического события.

В вышеуказанном законе обеспечивается безопасное и устойчивое функционирование информационно-телекоммуникационной сети Интернет на территории Российской Федерации, для чего в Федеральный закон «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» вводится статья 56^1, предусматривающая обязанности собственников, иных владельцев линий связи, их функциональных элементов или ресурсов, которые пересекают государственную границу Российской Федерации, предоставлять в электронной форме в Роскомнадзор информацию об использовании таких технических объектов в сроки, порядке, составе и формате, определяемых Роскомнадзором, а также информацию о системах электросвязи, средствах связи, осуществляющих функцию маршрутизации сообщений и обеспечивающих взаимо-

[3] Принят закон о «суверенном» интернете // Государственная Дума. URL: http://duma.gov.ru/news/44551/ (дата обращения 11 мая 2019).

действие с вышеназванными объектами, в том числе через иные линии связи, на которых на территории Российской Федерации не установлены средства связи, осуществляющие функцию маршрутизации сообщений электросвязи.

В законе указано, что контроль за выполнением установленных требований закона в части соблюдения правил маршрутизации сообщений электросвязи обеспечивается с использованием технических средств.

На следующие субъекты: операторов связи, собственников или владельцев технологических сетей связи, а также иных лиц, имеющих номер автономной системы для случаев использования ими Интернета, данным законом возложены обязанности:

1) выполнять установленные Роскомнадзором правила маршрутизации сообщений электросвязи;
2) в случае выявления Роскомнадзором нарушений правил маршрутизации сообщений электросвязи данные субъекты обязаны корректировать маршрутизацию сообщений электросвязи по его требованию;
3) при разрешении доменных имен использовать программно-технические средства, необходимые для такого разрешения, функционирующие в соответствии с требованиями Роскомнадзора, а также национальную систему доменных имен;
4) выполнять требования, установленные Роскомнадзором для обеспечения бесперебойного функционирования средств связи, обеспечивающих взаимодействие со средствами связи других операторов связи, собственников и владельцев технологических сетей связи, а также иных лиц, имеющих номер автономной системы, в том числе находящихся за пределами территории Российской Федерации;
5) в случае использования точек обмена трафиком для взаимодействия с другими операторами связи, собственниками и владельцами технологических сетей связи, а также иными лицами, имеющими номер автономной системы, для передачи сообщений электросвязи использовать только точки обмена трафиком, сведения о которых содержатся в реестре точек обмена трафиком;
6) в сроки, порядке, составе и формате, определенных Роскомнадзором, предоставлять в электронной форме в Роскомнадзор, в том числе по его требованию, следующую информацию:
   – об имеющемся у них номере автономной системы, о сетевых адресах, принадлежащих автономной системе, о взаимодействии с иными лицами, имеющими номер автономной системы;
   – о местах подключения средств связи к линиям связи, их функциональным элементам или ресурсам, пересекающим Государ-

ственную границу Российской Федерации, о местах установки средств связи, подключенных к линиям связи, их функциональным элементам или ресурсам на территориях иностранных государств;
- о маршрутах сообщений электросвязи;
- об используемых программно-технических средствах, необходимых для разрешения доменных имен;
- об инфраструктуре сетей связи.

Таким образом, очевидно, что сеть имеет трансграничный характер и государство может обеспечить регулирование только тех отношений, которые возникают на базе находящихся на его территории информационных технологий. В связи с этим распространение информации в сети бросает вызов установленным понятиям территориальных границ.

Компьютерные технологии тиражируют цифровой контент, и такая репликация предусмотрена протоколами Интернета для функционирования и взаимодействия всех ее технологических составляющих, копии информации создаются автоматически компьютерными технологиями при выполнении стандартных операций.

Конечно, в связи с этим возникают проблемы отсутствия доверия к интернет-среде, связанные с недостаточной информацией, получаемой пользователями Интернета, о принципах регулирования, о получении несанкционированного доступа.

Есть мнение, что в интернет-среде лучшим регулятором будет являться саморегулирование – это одна из возможностей, существующая в правовых рамках, позволяющая обеспечить информационную безопасность, которая направлена на разработку и реализацию защитных технологий и политик. Например, высказывается позиция, что открытые сети смогут обеспечить предоставление более информационно безопасных услуг и по более низким затратам на создание инфраструктуры, чем закрытые сети.

С точки зрения правового регулирования предполагается, что «закон регулирует поведение лица через угрозу применения мер государственного принуждения, а сетевое саморегулирование – через угрозу санкций со стороны членов интернет-сообщества»[9], что является более эффективным регулятором. С.В. Кобзева также поддерживает точку зрения, что саморегулирование в Интернете является положительной тенденцией регулирования интернет-отношений [10]. Можно найти достаточно аргументов, высказываемых учеными в научной литературе в поддержку данной позиции.

Однако ориентация на саморегулирование не решит все правовые проблемы, необходимо разрабатывать механизмы правоохранительной деятельности для обеспечения реакции государства на возникающие правонарушения.

Во время второго саммита ООН, посвященного инициативе ID2020, компании Microsoft и Accenture представили совместную разработку — прототип цифровой системы для идентификации личности. Система реализована на блокчейне и в будущем может объединить все мировые паспортные базы данных; к 2030 г. запланировано обеспечить всех людей на планете цифровым ID[4].

В силу п. 1 ст. 1210 ГК РФ стороны договора могут выбрать применимое право как при заключении договора, так и в последующем. Однако, определение применимого права в Интернете связано с разработанными нормами правового регулирования, ориентированными на технологии, посредством которых можно реализовать требование закона. Таким образом, интернет-пространство не только изменяет физические аспекты традиционных методов коммуникации, но и требует учитывать специфику технологий, на базе которых формируются интернет-отношения.

Оценка правонарушениям дается в соответствии с законом страны, на территории которой произошло нарушение. В связи с этим необходимо отметить, что кроме приведенных выше примеров определения территории по доменному имени используется также привязка по гражданству лица, совершившего правонарушение. Кроме того, в научной литературе высказывается точка зрения о возможной персональной юрисдикции, основанной исключительно на привязке к «национальности» интернет-сайта [2].

Целью любого закона, связанного с интернет-регулированием, является обеспечение защиты интернет-пользователей от произвольных действий провайдеров информационных услуг. Для этого интернет-сообществом разрабатываются открытые стандарты, которые позволяют обеспечить открытую функциональную совместимость технологий, используемых в Интернете. Открытые стандарты могут быть реализованы в качестве аппаратных и программных продуктов, определяющих технологическую политику, протоколы совместимости, управление технической передачей сообщений через все технологическое многообразие Интернета.

Можно утверждать, что технологии онлайновой коммуникации разрабатываются так быстро, что трудно просчитать все возможные правовые риски и угрозы.

Таким образом, изложенное позволяет заключить, что существующие правовые механизмы не всегда реализуемы для интернет-отношений. В связи с этим возможен следующий путь развития правового регулирования: изменение существующих правовых

---

[4] См.: Nanonewsnet.ru. URL: http://www.nanonewsnet.ru/news/2017/k – 2030 – godu – u – vsekh – zhitelei – planety – mogut – poyavitsya – tsifrovye – id (дата обращения 11 мая 2019).

методов регулирования с учетом технологических особенностей обеспечения взаимодействия интернет-технологий. Такой подход позволит сформировать комплексную отрасль права – право киберпространства, которое определит возможные комплексные организационные правовые методы регулирования интернет-отношений, институты и категории.

Благодарности

Статья подготовлена в рамках гранта № 18-29-16013 «Исследование концептуальных подходов к формированию системы правового регулирования обеспечения информационной безопасности в условиях больших вызовов в глобальном информационном обществе».

Статья подготовлена с применением СПС «Консультант Плюс».

Acknowledgements

The article was prepared within the framework of grant No. 18-29-16013 “Study of conceptual approaches to the formation of a system of legal regulation in the face of major challenges in the global information society”.

The article is prepared using SPS “Kosul’tant Plyus”.

Литература

1. Право в сфере Интернета: сб. статей / отв. ред. М.А. Рожкова. М.: Статут, 2018. 528 с.
2. *Zekos G.I., Amvrosia-Komotini T.* Cyberspace and Globalization // Law, Social Justice & Global Development (LGD). 2002. Vol. 1.
3. *Лемма Х.К.* Международно-правовые основания и способы определения принадлежности и статуса территорий: дис. ... канд. юрид. наук. Казань, 2000. С. 59–60.
4. *Дашян М.С.* Право информационных магистралей. М., 2007. С. 38.
5. Международное право: Учебник / отв. ред. С.А. Егоров. М., 2015. С. 98.
6. *Стрельцов А.А.* Основные проблемы правового обеспечения международной информационной безопасности // Динамика институтов информационной безопасности. М., 2018. С. 32.
7. *Жарова А.К.* О соотношении персональных данных с IP-адресом. Российский и зарубежный опыт // Вестник УРФО. Безопасность в информационной сфере. 2016. № 1 (19). С. 66.
8. *Дейнеко А.Г.* Право киберпространства: Pro et contra: сб. статей / отв. ред. М.А. Рожкова. М., 2018.
9. *Иванова К.А.* Современное понимание права граждан на свободу мнения в киберпространстве // Конституционное и муниципальное право. 2018. № 5. С. 37.
10. *Кобзева С.В.* Защита прав несовершеннолетних от угроз в сети Интернет // Информационное право. 2017. № 2. С. 35.

References

1. Rozhkova MA., rep. ed. *Law in the Internet*. A collection of articles. Moscow: Statut Publ.; 2018. 528 p. 1. [In Russ.]
2. Zekos GI., Amvrosia-Komotini T. Cyberspace and Globalization. *Law, Social Justice & Global Development (LGD)*. 2002. Vol. 1.
3. Lemma HK. *International legal grounds and methods for determining the belonging and status of territories*. [dis ... cand. yurid. nauk]. Kazan, 2000. p. 59-60. 1. [In Russ.]
4. Dashyan MS. *The law of information highways*. Moscow, 2007. p. 38. 1. [In Russ.]
5. Yegorov SA., resp. ed. *International Law*: Textbook. Moscow, 2015. p. 98. 1. [In Russ.]
6. Streltsov AA. The main issues of legal support of international information security. V: *Dynamics of information security institutions*. Moscow, 2018. p. 32. 1. [In Russ.]
7. Zharova AK. On the relationship of personal data with IP-address. Russian and foreign experience. *Bulletin of the Ural Federal District. Information security*. 2016;1:66. 1. [In Russ.]
8. Deineko AG. *The law of cyberspace: Pro et contra*. A collection of articles. Rozhkova MA., rep. ed. Moscow: 2018. 1. [In Russ.]
9. Ivanova KA. Modern understanding of the right of citizens to freedom of opinion in cyberspace. *Constitutional and Municipal Law*. 2018;5:37. (In Russ.)
10. Kobzeva SV. Protecting the rights of minors from threats in the Internet. *Information law*. 2017;2:35. (In Russ.)

Информация об авторе

Анна К. Жарова, кандидат юридических наук, доцент, Институт государства и права РАН, Москва, Россия; Россия, Москва, 119019, ул. Знаменка, д. 1; anna_jarova@mail.ru

Information about the author

Anna K. Zharova, Cand. of Sci. (Law) LLM, associate professor, Institute of State and Law of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; bld. 1, Znamenka str., Moscow, Russia, 119019; anna_jarova@mail.ru

УДК 512
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-43-51

К проблеме существования единственного решения системы полиномиальных уравнений

Аллаберди Г. Галканов

Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Московская область, Россия, agalkanov@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена проблеме существования и единственности решения системы полиномиальных уравнений. Степень каждого полинома не превосходит n. Все полиномы зависят от одного неизвестного и отличаются только своими коэффициентами. Сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения специального вида таких систем. Приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: полином, система, уравнение, существование решения, единственность решения

Для цитирования: Галканов А.Г. К проблеме существования единственного решения системы полиномиальных уравнений // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 43–51. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-43-51

To the issue of the unique solution existence in the polynomial equations system

Allaberdy G. Galkanov

State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuevo, Moscow Region, Russia, agalkanov@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to the issue of existence and uniqueness of the solution of the polynomial equations system. Degree of each polynom does not exceed All polynoms depend on the one unknown and differ only by their coefficients. A theorem of the unique solution existence for a special type of the system of the polynomial equations is formulated and proved. The appropriate examples are given.

Keywords: polynomial, system, equation, existence of the decision, uniqueness of the solution

For citation: Galkanov AG. To the issue of the unique solution existence in the polynomial equations system. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" series.* 2019;2:43-51. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-43-51

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений над полем комплексных чисел от комплексного неизвестного z:

$$\sum_{k=0}^{n} c_{jk} z^k = 0, \; j \in J = \{0, 1, 2, ..., n-1\}, \tag{1}$$

где $c_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$; $z = x + iy$; a_{jk}, b_{jk}, x, y – действительные числа, $i^2 = -1$; $\| c_{jk} \|$ – неособая матрица из коэффициентов полиномов. Чтобы система (1) тривиального решения не имела и максимальная степень хотя бы одного уравнения системы (1) не была меньше n, будем считать, что $\exists j \in J \left[c_{j0} \neq 0 \right]$, $\exists j \in J \left[c_{jn} \neq 0 \right]$. Теперь систему (1) будем рассматривать в $n+1$-мерном унитарном пространстве U^{n+1} с ортонормальным базисом $\mathrm{T} = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$. В базисе T введем векторы $C_0 = (c_{00}, c_{01}, c_{02}, ..., c_{0n})$,

$C_1 = (c_{10}, c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})$, $C_2 = (c_{20}, c_{21}, c_{22}, ..., c_{2n}), ..., C_{n-1} =$
$= \left(c_{(n-1)0}, c_{(n-1)1}, c_{(n-1)2}, ..., c_{(n-1)n} \right)$

и

$Z = (1, z, z^2, ..., z^n)$. Составим обобщенное векторное (или гипервекторное) произведение $V \in U^{n+1}$ векторов $C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ [1]:

$$V = \left[C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right] = \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \\ c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)0} & c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \dots & c_{(n-1)n} \end{vmatrix} =$$

$$= A_0\tau_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + \dots + A_n\tau_n,$$

где $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ – алгебраические дополнения базисных векторов $\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ соответственно:

$$A_0 = \begin{vmatrix} c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \dots & c_{(n-1)n} \end{vmatrix}, \quad A_1 = -\begin{vmatrix} c_{00} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)0} & c_{(n-1)2} & \dots & c_{(n-1)n} \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)0} & c_{(n-1)1} & \dots & c_{(n-1)n} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$A_n = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0(n-1)} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)0} & c_{(n-1)1} & \dots & c_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

Если ввести вектор $\overline{C}_j = (\overline{c}_{j0}, \overline{c}_{j1}, \overline{c}_{j2}, ..., \overline{c}_{jn})$, $\overline{c}_{jk} = a_{jk} - ib_{jk}$, комплексно-сопряженный вектору C_j, то (1) можно записать в виде равенства нулю скалярных произведений $\left(Z, \overline{C}_j\right)$:

$$\left(Z, \overline{C}_0\right) = 0 \ \wedge \ \left(Z, \overline{C}_1\right) = 0 \ \wedge \ \left(Z, \overline{C}_2\right) = 0 \\ \wedge \ ... \ \wedge \ \left(Z, \overline{C}_{n-1}\right) = 0. \tag{2}$$

По условию C – неособая матрица, поэтому векторы $C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ линейно независимы. Тогда векторы $\overline{C}_0, \overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_n$ также линейно независимы. Поскольку $\forall j \in J\left[\left(V, \overline{C}_j\right) = 0\right]$, то ввиду того, что размерность пространства U^{n+1} равна $n+1$, вектор Z должен быть линейно зависим от вектора V, т. е.

$$\frac{1}{A_0} = \frac{z}{A_1} = \frac{z^2}{A_2} = \frac{z^3}{A_3} = ... = \frac{z^n}{A_n}, \ A_0 \neq 0. \tag{3}$$

Теорема. Система полиномиальных уравнений (1) имеет единственное решение вида $z^* = A_1 : A_0$ в том, и только в том случае, если будут выполнены условия

$$\left({}^{2}_{1} = {}_{0}\ {}_{2}\right) \wedge \left({}^{3}_{1} = {}^{2}_{0}\ {}_{3}\right) \wedge \ ... \ \wedge \left({}^{n}_{1} = {}^{n-1}_{0}\ {}_{n}\right). \tag{4}$$

Доказательство необходимости. Пусть $z^* = A_1 : A_0$ – решение (1). Тогда при $z = z^*$ имеет место (2), из чего следуют равенства (3). Имеем

$$\frac{1}{A_0} = \frac{z^*}{A_1} \wedge \frac{1}{A_1} = \frac{z^{*2}}{A_2} \ \Rightarrow \ \frac{A_1^2}{A_0^2} = \frac{A_2}{A_0} \ \Leftrightarrow \ A_1^2 = A_0 A_2,$$

$$\frac{1}{A_0}=\frac{z^*}{A_1} \wedge \frac{1}{A_0}=\frac{z^{*3}}{A_3} \Rightarrow \frac{A_1^3}{A_0^3}=\frac{A_3}{A_0} \Leftrightarrow A_1^3=A_0^2A_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$\frac{1}{A_0}=\frac{z^*}{A_1} \wedge \frac{1}{A_0}=\frac{z^{*n}}{A_n} \Rightarrow \frac{A_1^n}{A_0^n}=\frac{A_n}{A_0} \Leftrightarrow A_1^n=A_0^{n-1}A_n.$$

Доказательство достаточности. Пусть выполнены условия (4) и $z^*=A_1 : A_0$.

$$A_1^2=A_0A_2 \Rightarrow \frac{A_1^2}{A_0^2}=\frac{A_2}{A_0} \overset{z^*=\frac{A_1}{A_0}}{\Rightarrow} z^{*2}=\frac{A_2}{A_0} \Leftrightarrow \frac{z^{*2}}{A_2}=\frac{1}{A_0},$$

$$A_1^3=A_0^2A_3 \Rightarrow \frac{A_1^3}{A_0^3}=\frac{A_3}{A_0} \overset{z^*=\frac{A_1}{A_0}}{\Rightarrow} z^{*3}=\frac{A_3}{A_0} \Leftrightarrow \frac{z^{*3}}{A_3}=\frac{1}{A_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$A_1^n=A_0^{n-1}A_n \Rightarrow \frac{A_1^n}{A_0^n}=\frac{A_n}{A_0} \overset{z^*=\frac{A_1}{A_0}}{\Rightarrow} z^{*n}=\frac{A_n}{A_0} \Leftrightarrow \frac{z^{*n}}{A_n}=\frac{1}{A_0},$$

откуда

$$\frac{1}{A_0}=\frac{z^*}{A_1}=\frac{z^{*2}}{A_2}=\frac{z^{*3}}{A_3}=\dots=\frac{z^{*n}}{A_n}, \tag{5}$$

что означает линейную зависимость векторов $Z^*=\left(1,\, z^*,\, z^{*2},\dots,\, z^{*n}\right)$ и V. С учетом свойства детерминанта имеем

$$\left(Z^*,\, \overline{C}_0\right)=c_{00}+c_{01}z^*+c_{02}z^{*2}+\dots+c_{0n}z^{*n}=$$
$$=\frac{1}{A_{11}}\left(c_{00}A_0+c_{01}A_1+c_{02}A_2+\dots+c_{0n}A_n\right)=0,$$

$$\left(Z^*,\, \overline{C}_1\right) = c_{10} + c_{11}z^* + c_{12}z^{*2} + \ldots + c_{1n}z^{*n} =$$
$$= \frac{1}{A_0}\left(c_{10}A_0 + c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + \ldots + c_{1n}A_n\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\left(Z^*,\, \overline{C}_{n-1}\right) = c_{(n-1)0} + c_{(n-1)1}z^* + c_{(n-1)2}z^{*2} + \ldots + c_{(n-1)n}z^{*n} =$$
$$= \frac{1}{A_0}\left(c_{(n-1)0}A_0 + c_{(n-1)1}A_1 + c_{(n-1)2}A_2 + \ldots + c_{(n-1)n}A_n\right) = 0,$$

т. е. $z^* = A_1 : A_0$ – решение системы (1). Покажем, что система (1) других решений не имеет.

Предположим, что система (1) имеет, по крайней мере, еще одно решение w^*, где $w^* \neq z^*$. Тогда $\frac{1}{A_0} = \frac{w^*}{A_1} = \frac{w^{*2}}{A_2} = \frac{w^{*3}}{A_3} = \ldots = \frac{w^{*n}}{A_n}$. Сравнение этих равенств с (5) дает $w^* = A_1 : A_0$. По предположению же $w^* \neq z^*$, это означает $A_1 : A_0 - A_1 : A_0 \neq 0$. Но это противоречит существованию противоположного числа на множестве комплексных чисел. Теорема доказана.

Следствие 1. Решение системы (1) в виде $z^* = A_1 : A_0$ не существует тогда и только тогда, когда

$$\left(A_1^2 \neq A_0A_2\right) \vee \left(A_1^3 \neq A_0^2A_3\right) \vee \ldots \vee \left(A_1^n \neq A_0^{n-1}A_n\right). \qquad (6)$$

Доказательство. К теореме применить логический закон противоположности.

Вырожденный случай: $rank A < n$. Существование корней (1), отличных от $x^* = A_1 : A_0$, возможно (пример 3).

Пример 1

$$\begin{cases} 2 - x - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 6 + x - 4x^2 + x^3 = 0, \quad A_0 = 4,\ A_1 = -4,\ A_2 = 4,\ A_3 = -4,\ A_0 A_1 \neq 0, \\ 12 + 5x - 6x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

$A_1^2 = A_0 A_2$, $A_1^3 = A_0^2 A_3$ – система имеет единственное решение вида $x^* = A_1 : A_0 = -1$.

Пример 2

$$\begin{cases} 2 - x - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 1 + 3x + 2x^2 = 0, \\ 1 + x = 0 \end{cases}$$ – система уравнений смешанных степеней.

$A_0 = -2,\ A_1 = 2,\ A_2 = -2,\ A_3 = 2,\ A_0 A_1 \neq 0,\ A_1^2 = A_0 A_2,\ A_1^3 = A_0^2 A_3$ – данная система имеет единственное решение вида $x^* = A_1 : A_0 = -1$.

Пример 3

$$\begin{cases} 1 + x^2 = 0, \\ 1 + x + x^2 + x^3 = 0, \quad A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 2,\ A_0 A_1 = 0. \\ -1 + x - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Вырожденный случай. Система имеет два мнимых корня $z_{1,2}^* = \pm i$. Согласно (6), единственное решение вида $x^* = A_1 : A_0$ не существует.

Пример 4

$$\begin{cases} 2 - 9x - 3x^2 - 5x^3 + x^4 + 2x^5 = 0, \\ -10 - 3x - 5x^2 + x^3 + 2x^4 = 0, \\ 4 - 4x - x^2 + x^3 = 0, \quad A_0 = 48,\ A_1 = -96,\ A_2 = 192,\ A_3 = -384, \\ 6 + 11x + 4x^2 = 0, \\ 2 + 7x + x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

$A_4 = 768,\ A_5 = -1536;\ A_1^2 = A_0 A_2,\ A_1^3 = A_0^2 A_3,\ A_1^4 = A_0^3 A_4,\ A_1^5 = A_0^4 A_5$ – система уравнений имеет единственное решение вида $x^* = A_1 : A_0 = -2$.

Пример 5.

$$\begin{cases} -1 + x = 0, \\ -2 + x + x^2 = 0, \\ 6 - 7x + x^3 = 0, \\ -1 + x^4 = 0, \\ 1 - 2x + x^5 = 0, \\ 1 - 2x + x^6 = 0, \\ 1 - 2x + x^7 = 0, \\ 1 - 2x + x^8 = 0, \\ 1 - 2x + x^9 = 0, \\ 2 - 3x + x^{10} = 0. \end{cases}$$

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall l \in L \left[A_1^l = A_0^{l-1} A_l \right],\ L = \{1,\ 2, \ldots,\ 9\}.$$

Данная система уравнений имеет единственное решение вида $x^* = A_1 : A_0 = 1$.

Примечание. Согласно теореме Абеля–Руффини, для произвольного полиномиального уравнения не существует явной формулы, связывающей его корни с его коэффициентами с применением арифметических операций (включая извлечение корня произвольной степени). Однако из доказанной выше теоремы и примеров 4 и 5 видно, что для систем полиномиальных уравнений теорема Абеля–Руффини перестает быть верной.

Пример 6

$$\begin{cases}(-2+i) & z+ & & =0,\\ (-2+i)+(-1+i)z+ & & z^2 & =0,\\ (-2+i)+ & z+(-2+i)z^2+z^3 & & =0\end{cases}\quad A_0=1,\ A_1=2-i,\ A_2=3-4i,\ A_3=2-11i,$$

$A_1^2=A_0A_2$, $A_1^3=A_0^2A_3$. Система имеет единственное решение вида $z^*=A_1:A_0=2-i$.

Пример 7

$$\begin{cases}1 & + & z & & =0,\\ (1+i) & -(2+i)z+ & & z^2 & =0,\\ (-10+5i)- & & 5z+(2+i)z^2+z^3 & & =0.\end{cases}\quad A_0=1,\ A_1=-1,\ A_2=-3-i,\ A_3=-1.$$

Условия (4) не выполняются. Поэтому, согласно (6), единственного решения системы вида $z^*=A_1:A_0$ не существует.

Литература

Галканов А.Г. Числовые уравнения и тождества в понятиях, теоремах, методах, задачах и решениях. М.: МГУЛ, 2013. 317 с.

Reference

Galkanov AG. *Numerical equations and identities in concepts, theorems, methods, problems and solutions.* Moscow: MGUL Publ.; 2013. 317 p. (In Russ.)

Информация об авторе

Аллаберди Г. Галканов, кандидат технических наук, доцент, Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Московская область, Россия; Россия, Московская область, Орехово-Зуево, 142611, ул. Зеленая, д. 22; agalkanov@yandex.ru

Information about the author

Allaberdi G. Galkanov, Cand. of Sci. (Engineering), associate professor, State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuevo, Moscow Region, Russia; bld. 22, Zelenaya str., Orekhovo-Zuevo, Moscow Region, Russia, 142611; agalkanov@yandex.ru

УДК 373.5.016:51
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-52-74

Проблема преемственности в методике преподавания математики и ее интерпретации в современных образовательных школах

Валентин К. Жаров
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, valcon@mail.ru

Рискельди М. Тургунбаев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан, musamat1@yandex.com

Аннотация. Проблема преемственности в жизни, но особенно в педагогической практике, является основанием успешного обучения в современной образовательной системе. Само понятие преемственности трактовали и философы, и педагоги (практические философы), методисты-теоретики и психологи, но строгое понимание, что же такое преемственность в образовательном процессе, так и не выразилось в приемлемом определении. Что же мешает в достаточной степени точно сформулировать это определение? В предлагаемой заинтересованному читателю статье авторы способом формализации некоторых гуманитарных вспомогательных понятий и методом математического моделирования дают строгое и вполне ясное, как нам кажется, математикам и педагогам-математикам понимание. Средствами педагогической информатики авторы дают возможные разъяснения и приводят пример из практической деятельности в Ташкентском государственном педагогическом университете им. Низами в преподавании учебной дисциплины математического анализа для студентов первого курса.

Ключевые слова: тезаурус учебной дисциплины, информационно-педагогическая среда, советское математическое образование, преемственность, математическая модель, педагогическая информатика, операционный состав действий, зона близкого действия, зона дальнего действия, микро- и макро-среда

Для цитирования: Жаров В.К., Тургунбаев Р.М. Проблема преемственности в методике преподавания математики и ее интерпретации в современных образовательных школах // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 52–74. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-52-74

The issue of continuity in the methodology of teaching mathematics and its interpretation in modern education practices

Valentin K. Zharov
Russian state University for the Humanities, Moscow, Russia, valcon@mail.ru

Riskeldi M. Turgunbaev
Nizami Tashkent state Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan, musamat1@yandex.com

Abstract. The issue of continuity in life, but especially in teaching practice is the basis for successful learning in the modern educational system. The very concept of continuity was interpreted by philosophers, educator (practical philosophers), methodologists-theorists and psychologists, but what is the strict understanding of the continuity in the educational process remained not expressed in an acceptable definition. What prevents us from formulating this definition sufficiently precisely? In the article offered to the interested reader, the authors by the way of formalizing some humanitarian auxiliary concepts and by the method of mathematical modeling give a strict and quite clear understanding, as it seems to us mathematicians and teachers-mathematicians. By means of pedagogical Informatics authors give possible explanations and give an example from practical activity of the Nizami Tashkent State Pedagogical Institute in teaching the discipline of mathematical analysis for first-year students.

Keywords: thesaurus of academic discipline, information and pedagogical environment, Soviet mathematical education, continuity, mathematical model, pedagogical Informatics, operational structure of actions, zone of near-action, zone of long-range action, micro-and macro – environment

For citation: Zharov VK., Turgunbaev RM. The issue of continuity in the methodology of teaching mathematics and its interpretation in modern education practices. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics"* Series. 2019;2:52-74. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-52-74

Введение

Всем известно, и часто повторяют теперь, – «история не имеет сослагательного наклонения». История свершившийся факт, но трактуемый, и заказчиками трактовок выступают политики. Статья посвящена новейшей истории математического образования и такому педагогическому явлению, как преемственность. Напомним несколько весьма важных положений, сформулированных, как это принято в математике, в форме теорем:

Теорема 1. Советское, а затем российское математическое образование являлось и является лучшим мире математическим образованием[1] [1 с. 187].

Теорема 2. Необходимо увеличить число часов, отводимое на изучение математики (и других традиционных для российской школы предметов: литературы, естественных наук), и сохранить, в основном, традиционное содержание школьных математических программ [1 с. 188].

Доказательство этих теорем, пусть совершенно ясных любому учившемуся в советской школе, является весьма сложным и многофакторным делом.

В данной статье мы преемственностью как явлением занимаемся не в специализированной математической школе[2], а в обычной общеобразовательной школе и на физико-математическом факультете педагогического университета. Это прежде всего связано с тем, что в педагогические вузы на физико-математические факультеты поступают, как правило, выпускники последних из названных, а на математические или механико-математические факультеты классических университетов поступают в основном из специализированных школ. Поэтому авторы понимают, что проблемы математического образования, обозначенные в [1], с введением в современное образование ЕГЭ и подобных тест-испытаний в странах СНГ усугубились. Добавим: Болонский процесс и некоторые размышления государственных чиновников высокого ранга, губящих традиционное, можно заметить, классическое российское математическое образование, не являются даже «фиговым листочком» результатов новаций, приведших к изменениям в педагогической среде в общеобразовательной школе. *Популярная в педагогической среде проблема обсуждения содержания математического образования, как стало ясно теперь, оказалась проблемой, целью*

---

[1] Здесь же заметим, что математическое образование Узбекистана было организовано в лучших традициях российской математической школы в начале XX в., а в последующем развито лучшими представителями узбекистанской школы математиков; Т.Н. Кары-Ниязов, Т.А. Сарымсаков, С.Х. Сираждинов, Н.П. Раманов и многие другие математики входят в знаменитые школы функционального анализа и теории вероятностей.

[2] В меньшей степени это относится к математическим классам, поскольку математическая среда общеобразовательной школы в основном зависит от учителя или коллектива учителей-математиков и учителей-естественников.

которой является «упрощенное» обучение математике, поскольку готовить учителей математики из людей, плохо знающих школьную математику, посредственно учившихся в школе, – это единственная возможность оправдания существования педагогических вузов. Другими словами, идея всеобщего образования привела к изменению статуса Учителя в обществе, что в свою очередь привело к изменению требований к педагогическим вузам и, как следствие, к приему в них студентов по остаточному принципу. В самом деле, зачем государству критически мыслящие граждане, которые не только будут давать оценку положению в технике и в технологиях производства и состоянию в обществе, но и оценивать сформированные государством элиты, их достижения и цели?

Данная статья нацелена на описание модели методики представления «операционного поля» мышления, опосредованно связанного с содержанием и явлением преемственности в математическом образовании. Как известно из психологии, основными мыслительными операциями являются анализ, синтез, обобщение (группировка) [2]. Что проверяется на выпускных экзаменах в общеобразовательной школе с помощью ЕГЭ или подобных тестов в один день по трем дисциплинам? Ответ: если коротко – память! Почти два последних года в выпускных классах России ученик на уроках математики занимается подготовкой к ЕГЭ, причем, как теперь признают, многие учителя ставят перед собой цель – освоение школьниками только базового уровня.

Из вышеприведенных соображений следует лемма.

Лемма 1. Математическое образование и математическая культура построены на передаче знаний о вычислениях, о методах абстрагирования (отвлечениях), о форме выражения мыслей и стилях дискурсов (в целом в национальной культуре) и, следовательно, о способах их сохранения.

Что же может дать математика как учебная дисциплина?[3] Китайцы еще в начале своих успешных экономических реформ (1979) поняли, что они (реформы) должны проводиться не для создания элит в обществе и не только для могущества государства, но прежде всего для повышения интеллекта нации. Иными словами, для создания общественной среды, в которой знания, технологии достойно оцениваются и являются основанием обороноспособности государства в широком смысле. Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно обратиться к [3,4] или к статьям и докладам одного из авторов этой статьи [5,6].

---

[3] Ответ на этот вопрос дает обширная методико-математическая, математическая литература. Мы же приведем историко-математическое наблюдение.

Кстати, предметные корни китайской методической школы сочетают развитие российской методической школы и использование традиционной китайской культуры. Китайские педагоги выделили как основной компонент методических задач при обучении математике в общеобразовательной школе – необходимость алгоритмического представления математики, поиска методов при решении учебных задач[4].

Что же нужно делать последователям российской школы и принимающим ЕГЭ как неизбежность? Ответ достаточно ясен: развивать специализированную математическую школу и, что не менее важно, изменить подход к подготовке педагогов-математиков.

Лемма 2. Изменение в своей основе традиционного математического образования меняет образование в целом, может быть радикально (катастрофически).

Обоснование этого утверждения можно провести методом от противного. Действительно, сформулируем отрицание данного утверждения: изменение в основе своей традиционного математического образования не меняет образования в целом и приводит к его процветанию.

Приведем два примера из истории культуры (математики), которые не нуждаются в трактовках, объяснениях, – это только факты истории, но опровергающие предположение.

Первый факт. Период эпигонства в греческой науке (II–I вв. до н. э.) и переданная ими «эстафета» для формирования римской традиции. Эту традицию явно выразил Цицерон, который прославляет своих соплеменников за то, что они, «слава богам, не похожи на греков и свои занятия математикой и подобными вещами ограничили практически применимым и полезным» (цитируется по [7 с. 82]) .

Второй факт. Разрушение традиционной китайской математики, после XIV в. н. э. Период с XI века по начало XIV в. в истории китайской математики назван «золотым периодом алгебры» [8]. Что стало с китайской традиционной математикой после экспансии западного миссионерства (западного стиля мышления), т. е. начала влияния на нее дедуктивной математики?

Где же находится, сохраняется, кем охраняется или, иначе, где находится необходимая консервативная среда, оберегающая от революционных новаций? Ответ очевидный: в методиках сохранения и донесения знаний последующим поколениям государства. Отсюда ясно, что необходимы система исследований, объединение

---

[4] Отметим, что эта цель полностью соответствует ментальности китайского народа, о чем свидетельствует история двух с половиной тысячелетий китайской математики.

научных знаний для исследования пограничных проблем педагогики и психологии, философии и педагогики. Такая система знаний развивается в педагогической информатике, где математическое моделирование, переформулировка проблем мононаук, находящихся в пересечениях с другими науками, является существом постановки задач.

Постановка задачи педагогического моделирования понятия преемственности в педагогической деятельности

Для примера выберем первый модуль по дисциплине «Математический анализ» и его операционные основания мышления (или базовые понятия, реализуемые в процессе адаптации первокурсников первого семестра). Построим педагогическую модель (она же алфавит и схемы мыслительной деятельности на языке конструктивной математики).

Для построения модели необходимо ответить на два вопроса. Первый вопрос: каков математический лексикон студентов-первокурсников? Второй вопрос: каков операционный состав их умений, отражающий в первом приближении мышление, в частности математическое мышление, или такое важное свойство, как гибкость мышления?

Для получения предварительных ответов на эти вопросы используем первую проверочную контрольную работу по элементарной математике. Частный вопрос: насколько точно образовано средней школой множество атомарных понятий или каков минимальный математический словарь студента-первокурсника? Также еще раз заметим, что для построения модели, алфавита и операций с буквами алфавита необходимы понимание уровня владения основными понятиями «элементарной» математики и представление об основных ее математических операциях. Модель позволяет наглядно реализовать метод тезауруса для оценки степени преемственности на первых этапах обучения будущих учителей математики [5].

Опыт изучения явления преемственности приводит к следующей формулировке определения понятия преемственности.

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ – инъективное соответствие, устанавливаемое специальным образом между личностной средой индивидуума, выражаемой лексиконом, и образовательной средой (внешней) посредством передачи сообщений (массивов данных), результатом которого является активизация процессов интериоризации и экстериоризации индивидуума в динамически изменяющейся информационной среде.

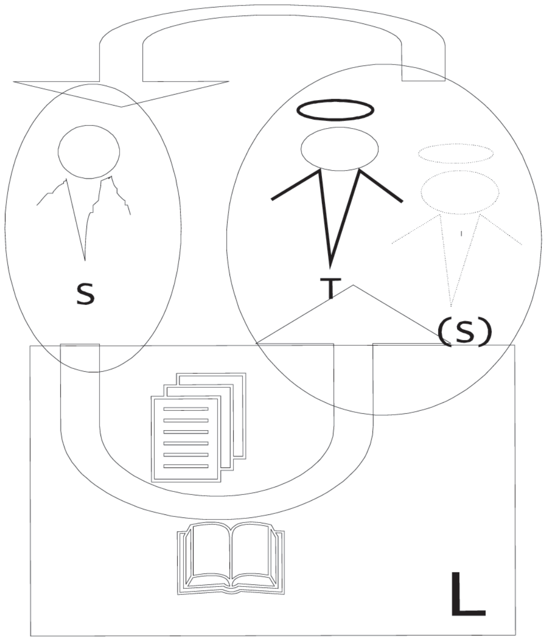

Рис. 1. Процесс формирования личностного лексикона

Под лексиконом мы понимаем набор слов, которыми владеет человек, его словарный запас. Различают два вида словарного запаса: активный и пассивный.

Активный словарный запас включает слова, которые человек использует в устной речи и письме.

Пассивный словарный запас включает в себя слова, которые человек знает при чтении или на слух, но не использует их сам в устной речи и письме. Пассивный словарный запас обычно больше активного в несколько раз [6 с. 37]. Формирование активного профессионального словаря – результат профессиональной деятельности, тезаурус предмета. По определению Современной энциклопедии, «ТЕЗАУРУС (от греч. thesauros – сокровище) [от греч. θησαυρός – сокровище]. 1) Словарь, в котором максимально полно представлены слова языка с примерами их употребления в тексте (в полном объеме осуществим лишь для мертвых языков). 2) Словарь, в котором слова, относящиеся к какой-либо области знания, расположены по тематическому принципу и показаны семантические отношения (родо-видовые, синонимические и др.) между лексическими единицами. В информационно-поисковых тезаурусах лексические единицы текста заменяются дескрипторами».

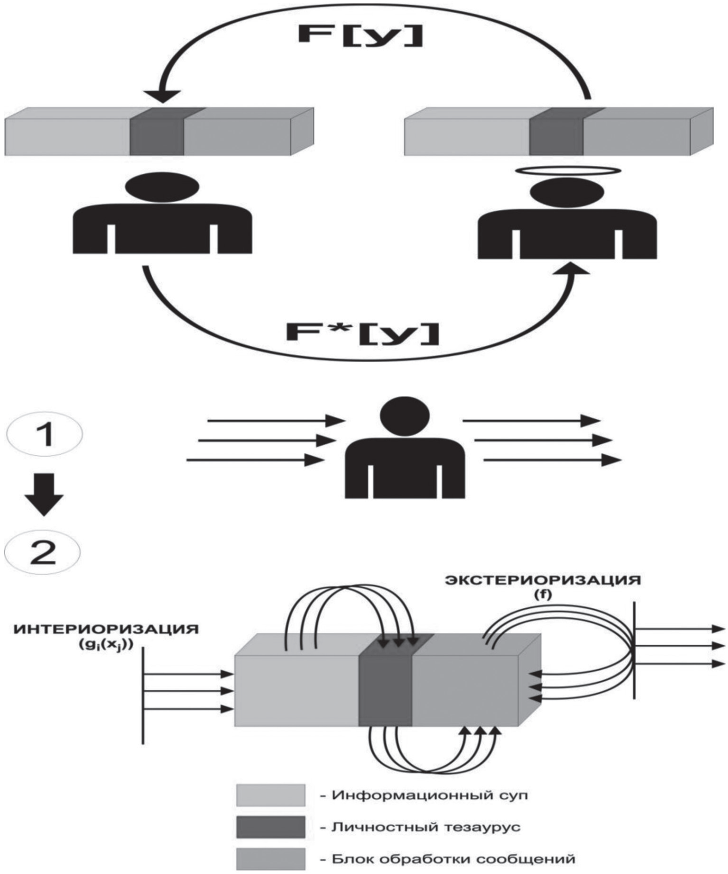

Рис. 2. Представление модели процесса обучения [12 с. 63]

С позиции средопедагогики тезаурус – одна из форм части образовательной среды, взаимодействующей с личностной средой индивида. Одна из проблем обучения индивида – формирование личностного лексикона, причем, придавая определенные свойства лексикону, педагоги могут управлять процессом обучения, получения информации, а также строить профессионально-ориентированный лексикон. Конечно же, хранилище означает фиксированную принадлежность, и по этому свойству лексикон отличается от тезауруса; также следует заметить, что тезаурус в обучении обладает свойством фиксации знания во времени [5 с. 64].

Поэтому лексикон студента должен состоять из набора сначала некоторых понятий профессиональных тезаурусов, имеющих пересечения с минимальными словарями, а затем пополняться всю его профессиональную жизнь [8–11].

Такое определение делает явной возможность достаточно образно представить интерпретацию изучаемого нами явления.

Наглядно решение задачи о представлении модели процесса обучения можно представить следующим образом.

В качестве гипотезы примем утверждение: ведущую роль в формировании школьного атомарного словаря играют учебные тексты, соединенные с образно-двигательной активностью, в то время как роль преподавателя в вузе заключается в том, чтобы быть для студента (будущего преподавателя, профессионала) инструктором по формированию соответствующих тезаурусов (образно-абстрактная активность). Также внешняя функция деятельности преподавателя предопределяет ему быть надежным организатором информационного поля ближнего действия студента и контролировать процесс освоения знаний с функцией уменьшения сопротивления среды и формирования истинных интерпретаций сведений, изложенных в учебном курсе. Отметим, что это новая функция деятельности современного преподавателя в информационной среде образования. Изложенное только что «формирование понятий» сродни гипотезе В.В. Морковкина с формированием информем [13,14].

Формально вышеизложенное можно представить следующим образом:

$W(t) \Rightarrow X_1$

W – множество информации, преподаваемой на курсе;

t – тексты учебных словарей;

X_0 – атомарные понятия;

X_1 – минимальный словарь первого уровня.

Выражение $\varphi\ (X_0) \longrightarrow X$ – есть привлечение грамматики (на первых этапах естественного языка), т. е., используя атомарные понятия из конечного множества X_0 в соответствии с правилом φ, можно добиться однозначного представления понятия X в лексиконе обучающегося, или это выражение можно в деятельности педагога трактовать как введение в лексикон студента нового понятия из профессионального тезауруса.

Таким образом, для успешного освоения дисциплины лексикон студента или создание личностного тезауруса должен быть представлен в виде: $\langle X_1, S_1\rangle \xrightarrow{\varphi} \langle \text{У}_1, S`_1\rangle$, где $S_1$ – набор правил или операций, $\text{У}_1$ – лексикон предметной области (идеальный, подмножество в предметном тезаурусе), $S`_1$ – лексикон ученика (фактический), с помощью которых происходит описываемый процесс освоения материала.

Так, если Φ – это процесс передачи информации, то получаем пространство

$$\Phi(\mathrm{X}_1) \supseteq (\mathrm{Y}_1),\ \Phi(\mathrm{S}_0) \supset (\mathrm{S}_1), \mathrm{X}_1 = \left\{x_1^1, x_2^1 \ldots x_n^1;\ s_1^1, s_2^1 \ldots s_t^1\right\}.$$

Полученные вложения пространств являют собой пространство значимой (готовой к экстериоризации) информации, т. е. модель представления студентом предметной области и выражения ее через доступные ему функции коммуникации, основанные на атомарных понятиях.

Рассмотрим ряд моделей в терминах словарей.

1. *Математическая модель образовательной траектории*

1.1. В.К. Жаров, Ю.В. Таратухина (как было авторами определено в [6]).

Пусть слова атомарного словаря образуют множество $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\right\}$ [10], B_n – слова естественного словаря, не являющиеся атомарными словами и не включающие в себя универсальную математическую знаковую систему Q [8], *P* – правила присоединения (конкатенации – связывания, ввода) слов из *A* и B_n. Отдельно остановимся на множестве *P*. Оно состоит из двух типов правил, образующих подмножества. Для определенности пока объявим, что правила из первого подмножества сформулированы для действий с атомарными понятиями, – например, оно содержит правила для произведения (иначе, определения) операций множества Q. Правила второго типа служат для конкатенации слов из словарей последующих уровней и слов естественного языка (связки, предлоги, вспомогательные слова и т. д.). В результате применения правил к элементам из *A* возникает множество слов, образующих словари более высокого уровня (например, второй, третьей ступеней [8,10], которые обозначают

$B_T = \left\{x \mid x = \alpha_i \rho \alpha_j,\quad \alpha_i, \alpha_j \in A, \left(i, j = \overline{1,13}\right) \rho \in \mathrm{Q} \subset P^1\right\} \cup$
$\cup \left\{\left(x\right) \beta_s = y, \beta_s \in P^2, s < \infty\right\}$ – множество терминов. Заметим, что если множество P описать в специальных символах, то получим начала программирования (специальные грамматику и язык, например, для тезауруса знаний какой-либо предметной области, в нашем случае с оговоркой фиксированного в данный момент времени). Кроме того, операция конкатенации ассоциативна, но не коммутативна. Множество $G = \left\{A, P, B_n\right\}$ принято называть

грамматикой, а слова $x=\alpha_i\rho\alpha_j$, $y=(x)\beta_s$ или $x=a_i\beta_s$ – словами из словаря более высокого уровня, чем атомарный; B_T – есть терминологический словарь, содержащийся в каком-либо тезаурусе. Тогда $L(G)=\left\{x \middle| x\in B_T \wedge \mathrm{A}\xrightarrow{G} x\right\}$ назовем языком (в нашем случае, в частности, математическим языком). Теперь рассмотрим тройку $\left\langle L(G), T, E\right\rangle$, где $T=\{t_k\}$, t_k – конкретные педагогические приемы и их композиции относительно педагогических способностей и опыта педагога (это множество конечно и назовем его технологией);

$E=E_m\cup E_m^k\cup E_T\cup\ldots\cup E_g$, где E – объединение сред: личности (микросреда E_m и E_m^k), обучающая среда (E_T) и другие среды (E_g). Ясно, что подсред конечное число и они имеют свойство изменяться с течением времени. Таким образом, рассматриваемую тройку назовем образовательной средой индивидуума или языковой средой.

Далее, используя индукцию по участникам, например E_m^k – членов какой-нибудь академической группы, несложно построить академические подгруппы, в ядре которых будут находиться математический язык и общекультурные приемы воспитания (педагогические технологии, несущие или нет инновационный характер), «родные» каждому индивиду. Иначе, произвести классификацию (факторизацию) по отношению к принадлежности к определенным культурным средам E и тем самым провести педагогический анализ академической группы. Последнее же позволит наставнику (тьютору) совместно с индивидуумом строить образовательную траекторию, планировать карьерное развитие и т. д. Если в E_m^k положить $k=1$ и включить временные промежутки (время обучения, изучения чего-либо где-либо), то по контрольно-измерительным результатам сложится база данных для тьюторов и Е-портфолио («модульно-рейтинговый портрет» студента).

Таким образом, в первом приближении представлен процесс формирования личностного тезауруса в информационном потоке, более того, понятие преемственности в такой интерпретации получило несколько трактовок (математико-педагогических интерпретаций) [6,7,9].

Во-первых, стало ясно, что преемственность – это множество условий существования лексиконов учащихся и предметных тезаурусов в информационном образовательном поле.

Во-вторых, организуемое преподавателем соответствие зависит от двух грамматик, а именно от знания преподавателем родного языка и грамматики использования логических приемов универсальной знаковой математической системы.

В-третьих, в терминах преемственности обучение представляется как множество подмножеств предметного тезауруса, реализуемого на множестве конкретных математических задач конкретного раздела математики.

Математическая модель эвристического представления о математическом знании абитуриентов педагогического вуза

Итак, что изучают в первом модуле по математическому анализу в педагогическом вузе? В качестве примера используем учебный план подготовки будущих учителей математики в ТГПУ им. Низами. [15,16,17].

Модуль 1. Действительные числа

Число; натуральное число; целое число; дробь; знаменатель; числитель; рациональное число; множество; элемент; подмножество; числовое множество; множество натуральных чисел; множество целых; множество рациональных чисел; сложение; вычитание; умножение; деление; сумма; разность; произведение; частное; больше; меньше; больше или равно; меньше или равно; понятие разрешимых и неразрешимых задач; порядок; упорядоченность множества рациональных чисел; плотность множества рациональных чисел; числовая ось, начало координат; единичный отрезок; рациональная точка; алгоритм построения точки, соответствующей данному рациональному числу; пропедевтика свойства непрерывности и его отличие от понятия плотности; аксиома Дедекинда; разбиение множества на части, пример разбиения множества рациональных чисел; сечение множества рациональных чисел; нижний класс; верхний класс; наименьший элемент; наибольший элемент; виды сечения; рациональное сечение; необходимость пополнения множества рациональных чисел; иррациональное сечение; иррациональное число; действительное число; множество иррациональных чисел; множество действительных чисел; сравнение действительных чисел; упорядоченность множества действительных чисел; плотность множества действительных чисел; сечение на множестве действительных чисел; непрерывность множества действительных чисел; десятичное приближение действительного числа; изображение действительного числа на числовой прямой; промежуток; сегмент; отрезок; интервал; полуинтервал;

полусегмент; луч; ограниченное снизу множество; нижняя граница; точная нижняя граница; инфимум; минимальный элемент; ограниченное сверху множество; верхняя граница; точная верхняя граница; супремум; максимальный элемент; ограниченное множество; неограниченное множество; модуль; модуль действительного числа; неравенство треугольника; окрестность точки; геометрический смысл модуля; аксиоматика множества действительных чисел.

В учебном плане 1-модуль. Множество действительных чисел.

Лекций – 6 ч; практических занятий – 6 ч; самостоятельной работы – 6 ч.

Требования: в результате изучения модуля студент должен

1. ПОНИМАТЬ:
   1) необходимость расширения понятия числа;
   2) смысл каждого слова и квантора в определений понятий и теорем;
   3) сущность теоремы Дедекинда;
   4) различие понятий «бесконечность» и «неограниченность» числовых множеств.
2. ЗНАТЬ:
   1) определение рационального числа; определение множества рациональных чисел, его обозначение;
   2) свойства плотности, упорядоченности множества рациональных чисел;
   3) определение сечения на множестве рациональных чисел, их виды;
   4) алгоритм построения сечения, определяющего рациональное число;
   5) определение иррационального числа;
   6) определение множества действительных чисел, его обозначение;
   7) определение множества действительных чисел, его обозначение;
   8) свойства множества действительных чисел (упорядоченность, плотность, непрерывность);
   9) алгоритм сравнения действительных чисел;
   10) основные числовые множества и их обозначения;
   11) определения ограниченности (ограниченной снизу (сверху)) множеств;
   12) определение наибольшего (наименьшего) элемента множества;
   13) определение точной верхней (нижней) грани множества;
   14) определение абсолютного значения действительного числа, его геометрической интерпретации;
   15) свойства абсолютного значения действительного числа.

3. УМЕТЬ:
   1) преобразовать простую дробь (рациональное число) в десятичную (периодическую) дробь и наоборот;
   2) изобразить рациональное число на числовой прямой;
   3) доказать плотность множества рациональных чисел;
   4) на множестве рациональных чисел построить сечение, определяющее рациональное число (иррациональные числа, например $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\lg 3$);
   5) доказать иррациональность чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\lg 3$ и т. п.;
   6) доказать, что бесконечная непериодическая десятичная дробь не является рациональным числом;
   7) исследовать на ограниченность множества;
   8) находить точные грани числовых множеств;
   9) приводить примеры и контрпримеры.

Опорные задачи

На «удовлетворительно»

1. Изобразите числа на числовой оси: $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, 2,8.
2. Какие из бесконечных десятичных дробей являются рациональными? Напишите рациональные числа в виде обыкновенной дроби: a) 2,13(14); b) 2,76(11); c) 0,4212121...; d) 0,1010010001...; e) 1,320320032...
3. Составьте сечения определяющие числа: a) 4; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$.
4. Исследуйте на ограниченность (ограниченность сверху, ограниченность снизу) множества. Найдите супремум и инфимум, если существуют:

a) $M = \left\{ r = \frac{p}{q},\ 0 < p < q \right\}$;

b) $M = \left\{ r = \frac{p}{q},\ 0 < q < p \right\}$;

c) $M = \left\{ r = \frac{p}{q},\ -q < p < 0 \right\}$;

d) множество иррациональных чисел из интервала (-1, 1);

e) $M = \left\{ \dfrac{n^4}{2n^4+3}, n \in N \right\}$;

f) $M = \left\{ \dfrac{n^2}{n+1}, n \in N \right\}$.

На «хорошо»

Докажите, что на верхнем классе сечения определяющего число $\sqrt{2}$, не существует наименьшего рационального числа.

На «отлично»

a) докажите, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ число иррациональное. Постройте сечение множества рациональных чисел, определяющее это число;

b) найдите точную верхнюю и точную нижнюю грани множества

$$M = \left\{ \frac{n^2}{2n^2+3}, n \in N \right\};$$

c) докажите, что множество не ограничено сверху

$$M = \left\{ \frac{n^2}{2n+1}, n \in N \right\}.$$

Вопросы

Модуль 1. Действительные числа

Тема 1. Первоначальные сведения о математическом анализе

1. Объясните значение слова «математика».
2. Расскажите, что вы понимаете под предметом математика.
3. Расскажите, что вы понимаете под предметом математический анализ.
4. Приведите примеры задач, решение которых привело к развитию математического анализа.
5. Назовите ученых, которые внесли большой вклад в основание математического анализа.
6. Назовите современные разделы математического анализа.
7. Расскажите о развитии математического анализа в Узбекистане.
8. Расскажите, какие понятия математического анализа изучаются в школах, лицеях.

Тема 2. Множество действительных чисел

1. Напишите общий вид рационального числа.
2. Расскажите, как определяется множество рациональных чисел.
3. Расскажите, как обозначается множество рациональных чисел.
4. Объясните, что означает выражение «множество рациональных чисел замкнуто относительно арифметических операций».
5. Докажите, что сумма двух рациональных чисел есть рациональное число.
6. Докажите, что разность двух рациональных чисел есть рациональное число.
7. Докажите, что произведение двух рациональных чисел есть рациональное число.
8. Докажите, что частное (делитель отличен от нуля) двух рациональных чисел есть рациональное число.
9. Объясните, что означает выражение «множество рациональных чисел упорядочено».
10. Расскажите, как определяются понятия «больше», «меньше», «равно» на множестве рациональных чисел.
11. Докажите, что для любых рациональных чисел r_1, r_2 имеет место только одно из соотношений: $r_1 = r_2$, или $r_1 < r_2$, или $r_2 < r_1$.
12. Докажите, что если $r_1 < r_2$, $r_2 < r_3$, то $r_1 < r_3$.
13. Объясните, что означает выражение «множество рациональных чисел плотно».
14. Докажите плотность множества рациональных чисел.
15. Дайте геометрическую интерпретацию рационального числа.
16. Расскажите, как определяется числовая прямая.
17. Объясните, что означает выражение «каждому рациональному числу соответствует единственная точка на числовой прямой».
18. Расскажите об алгоритме построения точки, соответствующей данному рациональному числу.
19. Покажите на примере, что не каждой точке прямой соответствует рациональное число.
20. *Переформулируйте утверждение «$\sqrt{2}$ не рациональное число» в виде «если..., то ...».
21. Докажите, что $\sqrt{2}$ не рациональное число.
22. Дайте определение сечению множества рациональных чисел.
23. Перечислите виды сечений множества рациональных чисел.
24. Приведите примеры сечений множества рациональных чисел.
25. Объясните, что означают выражения «сечение определяет рациональное число», «сечение определяет иррациональное число».

---

* Обозначены вопросы, не обязательные по программе, но желательные [17].

26. Подумайте, как можно определить свойства множества рациональных чисел на языке «сечений».
27. Расскажите, как определяется множество действительных чисел.
28. Расскажите, как обозначается множество действительных чисел, что означает эта буква (символ).
29. Объясните, что означает выражение «множество действительных чисел упорядочено».
30. Расскажите, как определяются понятия «больше», «меньше», «равно» на множестве действительных чисел.
31. Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2 имеет место только одно из соотношений $a_1 = a_2$, или $a_1 < a_2$, или $a_2 < a_1$.
32. Докажите, что если $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, то $a_1 < a_3$.
33. Объясните, что означает выражение «множество действительных чисел плотно».
34. Докажите плотность множества действительных чисел.
35. *Расскажите об идее доказательства плотности множества действительных чисел.
36. *Представьте доказательство плотности множества действительных чисел в виде схемы.
37. Дайте определение сечению множества действительных чисел.
38. Перечислите виды сечений множества действительных чисел.
39 Приведите примеры сечений множества действительных чисел.
40. Объясните, что означает выражение «множество действительных чисел непрерывно».
41. Сформулируйте теорему Дедекинда.
42. Докажите непрерывность множества действительных чисел.
43. *Расскажите об идее доказательства непрерывности множества действительных чисел.
44. *Представьте доказательство непрерывности множества действительных чисел в виде схемы.
45. Дайте определение модуля действительного числа.
46. Объясните геометрический смысл модуля.
47. Перечислите основные свойства модуля действительных чисел.
48. Докажите основные свойства модуля действительных чисел.
49. Дайте определение ограниченного сверху множества.
50. Приведите пример ограниченного сверху множества.
51. Дайте геометрическую интерпретацию ограниченного сверху множества.
52. *Приведите пример неограниченного сверху множества.
53. Дайте определение ограниченного снизу множества.
54. Приведите пример ограниченного снизу множества.
55. Дайте геометрическую интерпретацию ограниченного снизу множества.

56. *Приведите пример неограниченного снизу множества.
57. Дайте определение ограниченного множества.
58. Приведите пример ограниченного множества.
59. Дайте геометрическую интерпретацию ограниченного множества.
60. *Приведите пример неограниченного множества.
61. *Напишите определения ограниченного (сверху, снизу) множества логическими символами.
62. *Сформулируйте отрицание ограниченного (сверху, снизу) множества.
63. Представьте схему доказательства того, что данное множество неограничено.
64. Дайте определения основным промежуткам (отрезок, интервал, полуинтервалы, луч...).
65. Укажите (нарисуйте) на числовой прямой промежутки.
66. Дайте определение максимального элемента множества.
67. Приведите пример множества с максимальным элементом.
68. Докажите, что множество с максимальным элементом ограничено сверху.
69. *Приведите пример ограниченного сверху множества без максимального элемента.
70. Дайте определение точной верхней грани множества.
71. Дайте характеристику свойствам точной верхней грани.
72. Объясните, что означает символ sup.
73. Сформулируйте теорему о существовании точной верхней грани.
74. Докажите теорему о существовании точной верхней грани.
75. *Расскажите об идее доказательства существования точной верхней грани ограниченного сверху множества.
76. *Представьте доказательства существования точной верхней грани ограниченного сверху множества в виде схемы.
77. *Дайте схему доказательства того, что данное число есть точная верхняя грань заданного множества.
78. Дайте определение минимального элемента множества.
79. Приведите пример множества с минимальным элементом.
80. Докажите, что множество с минимальным элементом ограничено снизу.
81. *Приведите пример ограниченного снизу множества без минимального элемента.
82. Дайте определение точной нижней грани множества.
83. Дайте характеристику свойствам точной нижней грани.
84. Расскажите, что означает символ inf.
85. Сформулируйте теорему о существовании точной нижней грани.

86. Докажите теорему о существовании точной нижней грани.
87. *Расскажите об идее доказательства существования точной нижней грани ограниченного снизу множества.
88. *Представьте доказательства существования точной нижней грани ограниченного снизу множества в виде схемы.
89. *Предаставьте схему доказательства того, что данное число есть точная нижняя грань заданного множества.
90. Расскажите, как строится десятичное приближение действительного числа.
91. *Подумайте, как можно определить сумму (разность) двух действительных чисел на языке сечений.
92. *Подумайте, как можно определить произведение двух действительных чисел на языке сечений.

Последовательность составления элементов тезауруса

1. Обращаем внимание на фундаментальные понятия.

Множество
Элемент
Соответствие (условное, требующее специальных разъяснений)

Грамматика естественного языка (родного языка); операции: конкатенация, коннотация; коннотация слова в предложениях.

Интуитивные понятия: бесконечность, число, отрезок. Замечание: каждое из интуитивных понятий будет иметь в последующем в той или иной степени строгое обоснование.

2. Формулируем понятия следующего уровня, иначе, создание лексикона (личностного тезауруса).

Цифра	Построение чисел: простые, составные, свойства чисел НОД. НОК начальные сведения из теории чисел с последующим введением аксиоматики Д. Пеано
Операции над множествами	Кроме произведения множеств, диаграммы Эйлера-Венна
Упорядоченность	Упорядоченная пара
Произведение множеств	Декартово произведение

Отношение	Отношения: линейного, частичного порядка, равенства, лежать между, геометричность (образы и образность) математического понятия
Функциональные соответствия	Функции: 0-арные, унарные, бинарные, n-арные; начальная точка (фиксированная)
Операция (арифметическое действие)	Сложение
Множество натуральных чисел	Аксиомы Пеано; единица (единичный, целый, часть)
Дробь	Упорядоченная пара двух целых чисел; интерпретация деления как сложение (алгоритм Евклида)
Множество рациональных чисел	
Разбиение линейного (упорядоченного) множества	Разбиение множества рациональных чисел; числовая ось

Включив в список фундаментальных понятий определения из геометрии, мы расширим его до шести-семи понятий, используя знания учащихся (студентов-первокурсников) в грамматике родного языка. Понятия же следующего уровня построим как определения на основании атомарных (фундаментальных) тезисов. Таким образом, ясны методика расширения лексикона и личностного тезауруса в идеале до тезауруса учебной дисциплины (модели профессионального тезауруса), а также механизм развития деятельностного подхода.

Заключение

Определение преемственности вполне конструктивно, дополняет средопедагогическую терминологию и показывает конструктивные особенности педагогической информатики. Оно же является частью обоснования леммы 2 и соответствующего дополнения к обоснованиям И.Ф. Шарыгина о его теоремах 1 и 2.

Литература

1. Образование, которое мы можем потерять. Изд. 2-е, дополненное. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
2. Китайские программы по математике XX века (1902–1999). Поурочное планирование. Методические рекомендации. Пекин, 1999. 686 с. (на китайском яз.).
3. Цзинь Ли. Культурные основы обучения. Восток и Запад. М.: Высшая школа экономики, 2015. 465 с.
4. *Конрад Н.И.* Запад и Восток. М.: Наука, 1972. 498 с.
5. *Turgunbaev R.M.* About some approaches of realization of succession in training elements of the mathematical analysis in the system college – pedagogical university// European Applied Sciences. 2012. Vol. 1. P. 202–209.
6. *Жаров В.К., Таратухина Ю.В.* Феноменология кросс-культурного образования. М.: Янус-К, 2016. 136 с.
7. *Гейберг И.Л.* Естествознание и математика в классической древности. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 196 с.
8. *Березкина Э.И.* Математика Древнего Китая. М.: Наука, 1980. 312 с.
9. *Жаров В.К.* О «Введении» к трактату Чжу Шицзе «Суань сюе ци мэн» // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 6 (41). М.: Янус-К, 2001. С. 347–353.
10. *Жаров В.К.* Развитие методов преподавания традиционной китайской математики. (Опыт исследования информационно-педагогических сред). М.: Янус-К, 2002. 164 с.
11. *Жаров В.К., Матвеев О.А., Тургунбаев Р.М.* О подходах к реализации принципа преемственности в практике подготовки учителя математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2010. № 2. С. 91–98.
12. Информационно-педагогическая среда современного вуза: Коллективная монография / под. ред. В.К. Жарова М.: Янус-К, 2011. 268 с.
13. *Морковкин В.В., Морковкина А.В.* Язык, мышление и сознание et vice versa // Русский язык за рубежом. 1994. № 1. С. 63–70.
14. *Давыдов В.В.* Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). М.: Педагогика, 1972. 424 с.
15. *Тургунбаев Р.М., Алламбергенов И.Х.* О преемственности в обучении элементам математического анализа (на примере академического лицея-университета) // Science and Education a New Dimension. 2013. Vol. 5. P. 29–35.
16. *Тургунбаев Р.М.* Математический анализ. 1 часть. Учебник для студентов бакалавриата по направлению «Методика преподавания математики». Ташкент: Turon-Iqbol, 2018. 340 с. (на узб. яз.).
17. *Тургунбаев Р.М.* Математический анализ. Введение в анализ. Методическое пособие. Ташкент: ТГПУ, 2018. 56 с.

References

1. An education we could lose. 2nd ed., enlarged. Moscow: Lomonosov Moscow State University; Institute of computer research Publ.; 2003. 368 p. 1. [In Russ.]
2. Chinese mathematics programs of the 20th century (1902–1999). The lesson time planning. Methodical recommendation. Beijing, 1999. 686 p. [In Chinese]
3. Jin Lee. Cultural foundations of education. The East and West. Moscow: Higher School of Economics Publ.; 2015. 465 p. 1. [In Russ.]
4. Conrad NI. West and East. Moscow: Nauka Publ.; 1972. 498 p. (In Russ.)
5. Turgunbaev RM. About some approaches of realization of success in training elements of the mathematical analysis in the system college – pedagogical university. *European Applied Sciences*. 2012;1:202-09.
6. Zharov VK., Taratukhina YuV. Phenomenology of cross-cultural education. Moscow: Yanus-K Publ.; 2016. p. 136. [In Russ.]
7. Heiberg IL. Natural Science and mathematics in classical antiquity. Moscow; Leningrad: ONTI Publ.; 1935. 196 p. [In Russ.]
8. Berezkina EI. Mathematics of Ancient China. Moscow: Nauka Publ.; 1980. p. 312. [In Russ.]
9. Zharov VK. “Introduction” to the Zhu Shijie’s treatise “Suan Xue qi Meng”. V: Historical and mathematical research. Series 2. Vol. 6 (41). Moscow: “Yanus-K” Publ.; 2001. p. 347-53. [In Russ.]
10. Zharov VK. Development of methods of teaching the traditional Chinese mathematics. (An essay in the study of information and pedagogical environments). Moscow: “Yanus-K” Publ.; 2002. 164 p. [In Russ.]
11. Zharov VK., Matveev OA., Turgunbaev RM. On approaches to the implementation of the principle of continuity in the practice of training a teacher of mathematics. *Bulletin of the Moscow State Regional University. Pedagogy Series*. 2010;2:91-8 [In Russ.]
12. Zharov VK., ed. Information and pedagogical environment of the modern University. Collective monograph. Moscow: “Yanus-K” Publ.; 2011. 268 p. [In Russ.]
13. Morkovkin VV., Morkovkina AV. Language, thinking and consciousness et vice versa.*Russian language abroad*. 1994;1:63-70. [In Russ.]
14. Davydov VV. Types of generalization in teaching (logical and psychological issues of building academic subjects). Moscow: Pedagogika Publ.; 1972. p. 424. [In Russ.]
15. Turgunbaev RM., Allambergenov IH. On continuity in teaching elements of mathematical analysis (by the example of the academic Lyceum-University). *Science and Education a New Dimension*. 2013;5:29-35 [In Russ.]
16. Turgunbaev RM. Mathematical analysis. Part 1. Textbook for undergraduate students in the field of “Methods of teaching mathematics”. Tashkent: “Turon-Iqbol” Publ.; 2018. 340 p. (In Uzbek)
17. Turgunbaev RM. Mathematical analysis. Introduction to analysis. Methodical manual. Tashkent: TSPU Publ.; 2018. 56 p. [In Russ.]

Информация об авторах

Валентин К. Жаров, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; Россия Москва, 125993, Миусская пл., д. 6; valcon@mail.ru

Рискельди М. Тургунбаев, кандидат физико-математических наук, доцент, Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан; Узбекистан, Ташкент, ул. Бунёдкор, 27; musamat1@yandex.com

Information about the authors

Valentin K. Zharov, Dr. of Sci. (Pedagogics), professor, Russian state University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993; valcon@mail.ru

Riskeldi M. Turgunbaev, Cand. of Sci. (Mathematics), associate professor, Nizami Tashkent State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan; bld. 27, Bunyodkor str., Tashkent, Uzbekistan; musamat1@yandex.com

УДК 519.6
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-75-92

О переходных явлениях в одной модели эпидемии

Шакир К. Форманов
Институт математики им. В.И. Романовского АН Узбекистана
Ташкент, Узбекистан, shakirformanov@yandex.com

Зоя С. Чай
Университет информационных технологий им. Мухаммада аль-Хорезми
Ташкент, Узбекистан, chay1526@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена обобщенная модель Бартлетта–МакКендрика. Получены предельные распределения для размера эпидемии в регулярном случае, а также в переходных случаях 1-го и 2-го типа.

Ключевые слова: модель эпидемии, размер эпидемии, регулирующий параметр

Для цитирования: Форманов Ш.К., Чай З.С. О переходных явлениях в одной модели эпидемии // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 2. С. 75–92. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-75-92

About transitional phenomena in an epidemic's model

Shakir K. Formanov
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Academy of Sciences of Uzbekistan Tashkent, Uzbekistan, shakirformanov@yandex.com

Zoya S. Chay
Muhammad al-Khwarizmi University of Information Technologies
Tashkent, Uzbekistan, chay1526@mail.ru

Abstract. The generalized Bartlett-McKendrick model is considered. Final distributions are obtained for the magnitude of the epidemic in the regular case, as well as in transitional cases of the 1st and 2nd types.

Keywords: epidemic model, epidemic magnitude, regulatory parameter

For citation: Formanov ShK, Chay ZS. About transitional phenomena in an epidemic's model. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series.* 2019;2:75-92. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-2-75-92

С развитием теории случайных процессов, в частности марковских процессов с конечным и счетным числом состояний, которыми хорошо описываются эпидемические процессы, возникла теоретическая основа для построения вероятностных моделей.

Впервые такие модели рассмотрел МакКендрик [1], Бартлетт [2] изучил и развил их, в частности получил уравнения для производящей функции, связанной с вероятностным процессом.

Большинство работ при изучении таких моделей было связано с однородно смешивающейся популяцией, т. е. когда каждый восприимчивый может заразиться от любого из индивидуумов, являющегося источником инфекции.

Формализация этого предположения приводит к марковской модели, в которой вероятность одного из переходов, связанного с заболеванием одного восприимчивого, пропорциональна числу всех возможных контактов с восприимчивыми и носителями инфекции. Другой возможный переход связан с устранением больного с вероятностью, пропорциональной их числу. Стохастическая модель такого типа называется общей вероятностной моделью с однородным перемешиванием, а соответствующий марковский процесс известен как процесс Бартлетта–МакКендрика. Исследование этой модели велось в двух направлениях: в направлении асимптотического анализа вероятностей состояния и распределении определенных функционалов, таких как размер эпидемии, ее продолжительность, стоимость и т. п. Так, например, Бейли [3, 4] и Гани [5] получили явный вид распределения эпидемии, а Кендалл [6] и Уитл [7] получили и некоторые асимптотические результаты для случая больших исходных популяций $(r(0) = n \to \infty)$. Более того, описание предельного поведения распределения размера эпидемии было проведено в работах А.В. Нагаева и А.Н. Старцева [8,9,10,11,12,13] путем сведения задачи о распределении размера эпидемии к граничной задаче для сумм независимых случайных величин.

Было замечено, что в них параметр $\frac{\rho}{n}$ ($\rho = \mu/\lambda$ – относительный коэффициент устранения, λ и μ – коэффициенты заражения и устранения соответственно) является регулирующим в том смысле, что при $\frac{\rho}{n} > 1$ размер эпидемии небольшой, при $\frac{\rho}{n} < 1$ возникает большая эпидемия. При этом для $\frac{\rho}{n} > cm$ ($c > 0$, $m = S(0)$ – первоначальное число больных) размер эпидемии конечен, а при $\frac{\rho}{n} \to 0$ эпидемией охватывается практически вся популяция. Если $\frac{\rho}{n} \approx 1$, то возникают интересные переходные явления. В регулярных случаях, когда $0 < \varepsilon < \frac{\rho}{n} < 1 - \varepsilon$ или $1 + \varepsilon < \frac{\rho}{n} = 0(m)$, предельным законом для соответствующим образом центрированной и нормированной случайной величины ν_n (размер эпидемии) является нормальный. При $\frac{\rho}{n} \to \infty$ и $\frac{\rho}{n} \to 0$ с определенной скоростью в качестве предельных для ν_n и $n - \nu_n$ выступает пуассоновское распределение. При $\frac{\rho}{n} \to 1$ возникают предельные законы, связанные с моментами 1-ого выхода винеровского процесса за криволинейную границу.

Учет эффекта неоднородности перемешивания осуществлялся в двух направлениях. Первое из них связано с тем, что вероятность заражения пропорциональна некоторой функции от числа восприимчивых и носителей инфекции, а второе – с разбиением популяции на группы, в которых уже допускается однородное перемешивание.

Среди работ по исследованию общей вероятностной модели с неоднородным перемешиванием следует отметить работы Северо [14] и Ватсона [15]. Северо получил точное, но очень громоздкое решение системы дифференциально-разностных уравнений для $p_{rs}(\tau)$ – вероятности того, что в момент $\tau > 0$ популяция состоит из r восприимчивых и s больных при условии, что в начальный момент их было n и m соответственно. Ватсон получил нормальное приближение для ν_n при $\frac{m}{n} \to \alpha > 0$ и фиксированном $\frac{\rho}{n}$.

В данной работе рассматривается марковская модель распространения эпидемии в замкнутой популяции. В качестве модели распространения эпидемии рассматривается обобщение общей вероятностной модели Бартлетта–МакКендрика на случай неоднородно перемешивающейся популяции. В этой модели возможны два перехода – заражение восприимчивого и устранение больного, причем эффект неоднородного перемешивания прослеживается на таком важном функционале, как размер эпидемии в асимптотической постановке, т. е. когда рассматриваемая популяция достаточно велика.

Асимптотический анализ проведен при почти всех возможных соотношениях исходных параметров. Неоднородность перемешивания проявилась в том, что в этих моделях возникли новые пороговые эффекты и новые предельные распределения для изучаемого функционала, что связано с изменением поведения вспомогательной последовательности случайных величин, имеющих геометрическое распределение:

$$P\left\{\xi_i = k\right\} = p_{n-i} q_{n-i}^k \quad , \quad k \geq 0 \, ,$$

где p_{n-i} и q_{n-i} – переходные вероятности вложенной цепи, соответствующей исходному марковскому процессу, причем условию Линдеберга удовлетворяет только часть последовательности $\xi_{0,\dots,}\xi_{n-k_n}$, где k_n – некоторая числовая последовательность, стремящаяся к бесконечности, которая выбирается отдельно в каждом конкретном случае. Случайные величины ξ_i можно интерпретировать как число устранений между i-м и $(i+1)$ заболеваниями. Роль регулирующего параметра, от которого зависит развитие эпидемии, играет величина $\gamma_n = \dfrac{\rho}{\varphi(n)}$, где $\varphi(n)$ – некоторая функция от первоначального числа восприимчивых, входящая в вероятность заражения. При этом возникает новое пороговое число

$$\gamma_{n0} = (1 + \frac{m}{n}) / \varphi(n) H(1) \quad (\text{ где } H(1) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\varphi(nu)}). \qquad (1)$$

В том смысле, что при $\dfrac{\gamma_n}{\gamma_{n0}} \downarrow 1$ эпидемия охватывает практически всю популяцию, причем величина γ_{n0} может быть как меньше 1, так и больше, и даже может стремиться к бесконечности. В случае $\varphi(x) \equiv x$ (т. е. в модели с однородным перемешиванием) очевидно, что $\gamma_{n0} = 0$, так как $H(1) = \infty$. Если $m = o(n)$ и функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, то $\gamma_{n0} < 1$ и ситуация во многом аналогична случаю $\varphi(x) \equiv x$, и здесь удастся получить аналоги предельных теорем для размера эпидемии при некоторых условиях регулярности $\varphi(x)$, кроме случая $\frac{\gamma_n}{\gamma_{n0}} \downarrow 1$, в котором предельное распределение ν_n найти не удается.

Пусть имеется некоторая замкнутая популяция, которая в момент $t > 0$ состоит из $R(t)$ восприимчивых и $S(t)$ больных, $R(0) = n$, $S(0) = m$ и пусть $\xi(t) = \left(R(t),\, S(t)\right)$. В качестве модели эпидемии рассматривается одномерный по времени двумерный марковский процесс со следующими переходными вероятностями за время $\Delta \to 0$:

$$\begin{cases} P\left\{\xi(t+\Delta) = (r-1, s+1) / \xi(t) = (r, R)\right\} = \lambda\varphi(r)\psi_1(s)\Delta + 0(\Delta) \\ \quad P\left\{\xi(t+\Delta) = (r, s-1) / \xi(t) = (r, s)\right\} = \mu\psi_2(s)\Delta + 0(\Delta), \end{cases} \tag{2}$$

где φ, ψ_1, ψ_2 – некоторые неотрицательные функции. Здесь первый из переходов связан с заражением восприимчивого, второй – с устранением больного.

Очевидно, что состояния вида $(k, 0)$ являются поглощающими $(0 \le k \le n)$ и, следовательно, при попадании в них процесс заканчивается. Эпидемия размера ν_n соответствует поглощению в состоянии $(n - \nu_n, 0)$.

Рассмотрим случай, когда в модели (2) $\varphi(x) = x^a$, $a > 0$, $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) > 0$. При $a = 1$ и $\psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv x$ было изучено А.В. Нагаевым и А.Н. Старцевым в [8], где задача о размере эпидемии сводилась к граничной задаче для сумм независимых случайных величин, определяемых по вложенной цепи Маркова, соответствующей исходному марковскому процессу $\xi(t)$, а переходные вероятности вложенной цепи имеют вид

$$\begin{cases} \rho_r = \mathrm{P}\{(r,s) \to (r-1,\ s+1)\} = \dfrac{\varphi(r)}{\rho+\varphi(r)} \\ q_r = \mathrm{P}\{(r,s) \to (r,\ s-1)\} = \dfrac{\rho}{\rho+\varphi(r)} \end{cases}, \qquad (3)$$

$\rho = \dfrac{\mu}{\lambda}$ – относительный коэффициент устранения. Из вида вероятностей p_r и q_r видно, что функции ψ_1 и ψ_2 при исследовании размера эпидемии никакой роли не играют, так как p_r и q_r от них не зависят. Параметром, регулирующим развитие эпидемии, будет $\gamma_n = \dfrac{\rho}{\varphi(n)} = \dfrac{\rho}{n^a}$. Заметим, что при $a = 0$ вложенная цепь Маркова характеризуется более простыми переходными вероятностями:

$$\begin{cases} p_r = \mathrm{p} = \dfrac{1}{1+\rho}; \\ q_r = q = \dfrac{\rho}{1+\rho}; \end{cases} \qquad r = \overline{1,\ n}; \qquad \begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$$

Поэтому вероятность $P\{\nu_n = k\}$ при $k < n$ равна вероятности получения в нуле на $(2k + m)$-м шаге неограниченного линейного блуждания с вероятностями перехода вправо и влево, равными p и q соответственно.

При анализе модели (2) для $a > 0$ получены предельные распределения для ν_n при $n \to \infty$, $m \to \infty$, $m = o(n)$ и любом фиксированном $\delta > 0$:

1) регулярный, когда $\max(0, 1-a) + \delta < \gamma_n < 1-\delta$ или $1+\delta \le \gamma_n = o(m)$;

2) переходный 1-го типа, когда $\gamma_n \to 1$;
3) переходный 2-го типа, когда $\dfrac{\gamma_n}{m} \geq \delta$;
4) пороговый, когда $\gamma_n \approx \gamma_{n0} = (1-a)(1+\dfrac{m}{n})$ при $0 < a < 1$ и $\gamma_n \to 0$ при $a \geq 1$.

Рассмотрены также случаи 1)–3) при $n = O(m)$.

Обозначим $\beta = m(1-\gamma_n)$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, α_n – положительный корень уравнения

$$f_n(\alpha) = \frac{m}{n} + \alpha - \frac{\gamma_n}{a-1}\left[(1-\alpha)^{1-\alpha} - 1\right] = 0, \qquad (4)$$

$$d_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 < a < \dfrac{1}{2}; \\ \sqrt{\dfrac{n}{\ln n}}, & a = \dfrac{1}{2}; \\ n^{1-a}, & \dfrac{1}{2} < a < 1; \end{cases}$$

$$\overline{\gamma_{n0}} = \begin{cases} \gamma_{n0}, & 0 < a < 1 \\ 0, & a \geq 1 \end{cases}$$

Введем случайные величины ξ_i как времена пребывания случайного блуждания (2) на прямых $r = n - i$, $i = \overline{0, n-1}$, причем ξ_i независимы в силу того, что блуждание марковское и имеет распределение (1), а переходные вероятности вложенной цепи p_{n-i} и определяются из (3).

Пусть $S_k = \sum_{i=0}^{k-i} \xi_i$, тогда

$$\mathrm{P}\left\{\nu_n > k\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_0 < m, \xi_0 + \xi_1 < m, \ldots, \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k < m\right\} =$$
$$= \mathrm{P}\left\{\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k < m\right\}$$

Нетрудно установить, что $m_i = \mu\xi_i = \dfrac{q_{n-i}}{p_{n-i}} = \dfrac{\rho}{(n-i)^a}$, $\sigma_i = D\xi_i = m_i + m_i^2$.

Введем обозначения $M_k = MS_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i$, $B_k^2 = DS_k = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i^2$,

$$b_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{B_{k_n}}, \quad t_k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i^2, \quad S_k^* = \frac{S_k - M_k}{B_{k_n}},$$

где $\left\{k_n\right\}$ – некоторая числовая последовательность, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, которая в дальнейшем выбирается специально. Нетрудно заметить, что

$$\mathrm{P}\left\{\nu_n > k_n\right\} = \mathrm{P}\left\{S_i < m + i\,, i = \overline{0,k}\right\}. \tag{5}$$

Введем две ломаные – случайную $\xi_n(t)$ и фиксированную $g_n(t)$ с вершинами в точках $(t_k; S_k^*)$ и $(t_k, \dfrac{m + k - M_k}{B_{k_n}})$, $k = \overline{0,k_n}$ соответственно. Тогда (5) можно записать следующим образом:

$$\mathrm{P}\left\{\nu_n > k_n\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_n(t) < g_n(t)\,, 0 \le t \le 1\right\}. \tag{6}$$

Это соотношение позволяет применить принцип инвариантности Донскера–Прохорова о слабой сходимости распределений $f(\xi_n(t))$ к распределению $f(w(t))$ в классе непрерывных в $C[0,1]$ функционалов f, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс [16]. В регулярных случаях с нормальной аппроксимацией граница $g_n(t)$ в пределе вырождается:

$$\lim_{n\to 0} g_n(t) = \begin{cases} t\infty, & 0 < t < 1; \\ const, & t = 1 \end{cases}$$

и нужный результат получается из соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\nu_n > k_n\} = P\{w(1) < \lim_{n\to\infty} g_n(1)\}, \qquad (7)$$

если $\xi_n(t)$ слабо сходится к винеровскому процессу $w(t)$, причем k_n выбирается так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1) < \infty$:

$$g_n(1) = \frac{n}{B_{k_n}} \; f_n(\frac{i}{n}) + o(1) = \frac{n}{B_{k_n}} f_n{}'(\alpha_n)(\frac{k_n}{n} - \alpha_n)\cdot(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{f_n{}'(\alpha_n)(k_n - n\,\alpha_n)}{B_{k_n}}(1 + o(1)),$$

где α_n – корень (4). Отсюда понятно, что центрирующую и нормирующую последовательности a_n и b_n необходимо выбирать следующим образом: $\alpha_n \sim n\alpha_n$, $b_n \sim -\dfrac{B_{k_n}}{f_n{}'(\alpha_n)}$.

Тогда $\mathrm{P}\left\{\nu_n > \alpha_n - b_n x\right\} = \mathrm{P}\left\{w(1) < x\right\}(1 + o(1))$.

Так как проверку условия Линдеберга провести несложно, а соотношение (7) нуждается в дополнительном обосновании, то приведем следующее утверждение.

Лемма. Пусть $\xi_n(t)$ – случайная ломаная, порожденная суммами независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга и

$$\tau_{g_n}(\xi_n(g)) = \inf\left\{t : \xi_n(t) \ge g_n(t)\right\},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t) = g(t) \equiv \begin{cases} +\infty, & 0 < t < 1; \\ const, & t = 1. \end{cases}$

Если: 1) $g_n'(t) \le 0 \quad 0 \le t \le 1$ или $g_n(t)$ выпукла вверх и $g_n(0) \ge \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$, то $\tau_{g_n}(\xi_n(g))$ слабо сходится к $\tau_g(w(g))$, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Доказательство леммы приводить не будем в силу его громоздкости.

Приведем полученные результаты.

Теорема 1. В регулярном случае для всякого любого фиксированного x имеем:

$$\mathrm{P}\left\{\nu_n > \alpha_n - b_n x\right\} = \Phi(x) + o(1),$$

где $a_n = \begin{cases} \dfrac{m}{\gamma_n - 1}, & \gamma_n > 1; \\ n\alpha_n, & \gamma_n < 1; \end{cases}$

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m\,\gamma_n\,(1+\gamma_n)}{(\gamma_n - 1)^3}}, & \gamma_n > 1 \\ \dfrac{\sqrt{n\alpha_n\left[1 + \dfrac{\gamma_n^2}{2a-1}\cdot(1-\alpha_n)^{1-2a} - 1\right]}}{\gamma_n(1-\alpha_n)^{-a} - 1}, & \gamma_n < 1. \end{cases}$$

Заметим, что при $a = 1$ уравнение (4) принимает вид $\dfrac{m}{n} + \alpha + \dfrac{\rho}{n}\ln(1-\alpha) = 0$, и тем самым получаем теорему 1 из $[8]$.

Доказательство теоремы 1.

1. Пусть $1 + \delta < \gamma_n = o(m)$. Тогда при достаточно большом n и для $\forall \varepsilon > 0$ можно записать следующее неравенство:

$$\frac{m}{n} - (\gamma_n - 1)(1+\varepsilon)\alpha < f_n(\alpha) < \frac{m}{n} - (\gamma_n - 1)(1-\varepsilon)\alpha.$$

Так как ε – произвольно, то отсюда находим $\alpha = \frac{m/n}{\gamma_n - 1}(1 + o(1))$.

Центрирующая и нормирующая последовательности будут выглядеть следующим образом:

$$\alpha_n \sim \frac{m}{\gamma_n - 1}; \qquad b_n \sim \sqrt{\frac{m\gamma_n(\gamma_n + 1)}{(\gamma_n - 1)^3}}.$$

Покажем, что $\frac{b_n}{\alpha_n} \to 0$: $\frac{b_n}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{\gamma_n(\gamma_n + 1)}{(\gamma_n - 1)m}} = O(\frac{1}{\sqrt{m}}) = o(1)$.

Теперь убедимся, что

$$g_n(0) \sim \frac{m}{B_{k_n}} \sim \frac{m}{\sqrt{n\,\alpha\gamma_n(\gamma_n + 1)}} \sim \sqrt{\frac{m(\gamma_n - 1)}{\gamma_n(\gamma_n + 1)}} \to \infty.$$

2. Пусть $\max(0, 1 - a) + \delta < \gamma_n < 1 - \delta$, α_n – положительный корень уравнения (4), α – корень уравнения: $\alpha - \frac{\gamma_n}{a - 1}\left[(1 - \alpha)^{1-a} - 1\right] = 0$.

Очевидно, что $0 < \alpha_1 \le \alpha_n \le \alpha_2 < 1$ и $\alpha_n - \alpha \to 0$. Так как $k_n \sim n\,\alpha_n$, то

$$B_{k_n}^2 = \frac{n\,\gamma_n}{a - 1}\left[(1 - \alpha)^{1-a} - 1\right] + \frac{n\,\gamma_n^2}{2a - 1}\left[(1 - \alpha)^{1-2\alpha} - 1\right] + O(\gamma_n) =$$

$$= n\alpha\left[1 + \frac{\gamma_n^2}{2a - 1}\frac{(1 - \alpha)^{1-2a}}{\alpha}\right] + O(\gamma_n),$$

где $0 < \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 < 1$, т. е. $B_{k_n}^2 \approx n$.

Заметим, что $g_n(0)=\frac{m}{B_{k_n}}\left(1+o(1)\right)=O\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right)$, т. е. $g_n(0)$ не обязательно стремится к бесконечности. Отметим, что $\frac{b_n}{a_n}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o(1).$

Теорема 1 доказана.

Опишем теперь переходные явления 1-го типа.

Теорема 2. При $\left|\beta\right|\le\beta_o<\infty$ и $m^3=O(n)$ для любого фиксированного $x>0$ имеем:

$$P\left\{\nu_n>m^2x\right\}=$$

$$=P\left\{w(t)<\frac{1}{\sqrt{2x}}+\beta t\sqrt{\frac{x}{2}}-\alpha\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{m^3}{n}t^2,\ 0\le t\le 1\right\},$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Следствие 1. Если $\beta\to 0$, $m^3=o(n)$, то при любом фиксированном $x>0$ имеем:

$$P\left\{\nu_n>m^2x\right\}=P\left\{w(t)<\frac{1}{\sqrt{2x}},0\le t\le 1\right\}(1+o(1)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2x}}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\left(1+o(1)\right).$$

Следствие 2. Если $\left|\beta\right|\le\beta o$ и $m^3=o(n)$, то при любом фиксированном $x>0$

$$\text{ùíùì}\left\{ \nu_n > \quad ^{2} \right\} = \left\{ \text{ùùùì} \frac{1}{\sqrt{2x}} + \beta\sqrt{\frac{x}{2}} \qquad \le \quad \le \right\}\left(\quad + \qquad \right) =$$

$$= 1 - \frac{|\beta| e^{-\frac{\beta}{2}}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{4}\beta^2} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{ -\frac{\beta^2}{16} - u \right\} du \left(1 + o(1)\right).$$

Доказательство теоремы 2

В данном случае $k_n = o(n)$, и поэтому $B_{k_n}^2 \sim 2k_n$, $t_i \sim \frac{i}{k_n}$, тогда $P\{\nu_n > k_n\} = P\{\xi_n(t_i) < g_n(t_i), \quad i = \overline{0, k_n}\}$

$$= P\left\{ \xi_n(t_i) < \frac{n}{B_{k_n}} f_n\left(\frac{i}{n}\right) + o(1), \quad i = \overline{0, k_n} \right\},$$

Считая $k_n = [m^2 x]$ ($[y]$ – целая часть y), получим:

$$g_n(t_i) = \frac{n}{B_{k_n}} f_n\left(\frac{i}{n}\right) + o(1) = \frac{m}{\sqrt{2k_n}} + \frac{i(1-\gamma_n)}{\sqrt{2k_n}} - \frac{\gamma_n a i^2}{2n\sqrt{2k_n}} + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} + \beta\sqrt{\frac{x}{2}} t_i - \frac{am^3}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2} t_i^2 + o(1).$$

Согласно принципу инвариантности имеем:

$$P\{\nu_n > k_n\} = P\{\xi_n(t) < g_n(t), \ 0 \le t \le 1\} =$$

$$= P\left\{ w(t) < \frac{1}{\sqrt{2x}} + \beta\sqrt{\frac{x}{2}} t - \frac{am^3}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} t^2, \ 0 \le t \le 1 \right\}\left(1 + o(1)\right),$$

что и доказывает теорему 2.

Теорема 3. При $|\beta| \to \infty, \beta = o(m)$ и $\frac{n}{m^3} = o\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$ для любого фиксированного x>0 имеем: $P\{\nu_n > a_n - b_n x\} = \Phi(x)\big(1 + o(1)\big)$, где $a_n = \frac{\sqrt{2nm}}{a}$, $b_n = \left(\frac{2n^3}{ma^3}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Доказательство теоремы 3

Так как $\gamma_n \to 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n = n(\varepsilon)$ такое, что

$$\frac{m}{n} - (1+\varepsilon)\frac{a}{2}\alpha^2 < f_n(\alpha) < \frac{m}{n} - (1-\varepsilon)\frac{a}{2}\alpha^2.$$

Так как ε – произвольное, то $\alpha_n = \sqrt{\frac{2m}{na}\big(1 + o(1)\big)}$.

Отсюда имеем: $a_n \sim \sqrt{\frac{2mn}{a}}$, $b_n \sim \left(\frac{2n^3}{ma^3}\right)^{\frac{1}{4}}$, причем

$$g_n(0) = \frac{m - \gamma_n - 1}{B_{k_n}} \sim \frac{m}{\sqrt{2_{k_n}}} \sim \left(\frac{m^3 a}{8n}\right)^{\frac{1}{4}} \to \infty.$$

Легко убедиться в том, что $i = (mn)^{\frac{1}{4}}$ обеспечивает выполнение доказуемого.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $|\beta| \to \infty$, $\beta = o(m)$, $\frac{m^3}{n} = O(\beta^2)$.

Тогда для любого фиксированного x имеем: $P\{\nu_n > a_n - b_n x\} = \Phi(x)\big(1 + o(1)\big)$, где $a_n = \begin{cases} \dfrac{2m^2}{(1+\delta')(-\beta)}, \quad \delta' = \sqrt{1+\dfrac{2am^3}{n\beta^2}} & \beta < 0 \\ \dfrac{\beta n}{ma}(1+\delta') & \beta > 0 \end{cases}$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2m^2(1+\delta')^{\frac{1}{2}}}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}\left[\dfrac{2am^3}{n\beta^2}+(1+\delta')\right]} & \beta < 0 \\ \sqrt{\dfrac{2mn(1+\delta')}{\beta a}}\cdot\dfrac{1}{\delta'} & \beta > 0 \end{cases}$$

Доказательство теоремы 4

1. Пусть $\beta < 0$. Тогда при достаточно больших n и любом $\varepsilon > 0$

$$\frac{m}{n}+\frac{\beta}{m}\alpha-(1+\varepsilon)\frac{a}{2}\alpha^2 < f_n(\alpha) < \frac{m}{n}+\frac{\beta}{m}\alpha-(1-\varepsilon)\frac{a}{2}\alpha^2,$$

$$\alpha = \frac{2}{(1+\delta')}\frac{m^2}{n(-\beta)}.$$

Тогда $a_n \sim \dfrac{2m^2}{(1+\delta')(-\beta)}, \quad g_n(0) = \dfrac{\sqrt{(-\beta)(1+\delta')}}{2}\big(1+o(1)\big) \approx |\beta|^{\frac{1}{2}}$,

$$b_n \sim \frac{2m^2(1+\delta')^{\frac{1}{2}}}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}\left[\dfrac{2am^3}{n\beta^2}+(1+\delta')\right]}, \quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{(1+\delta')^{\frac{3}{2}}}{(-\beta)^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{2am^3}{n\beta^2}+(1+\delta')\right]} = O\left(\frac{1}{(-\beta)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$i = \dfrac{m^2}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}$ – обеспечивает доказуемое.

2. Пусть теперь $\beta > 0$. Тогда $\alpha = \frac{\beta}{ma}(1+\delta^{'})$. Последовательности a_n и b_n имеют вид:

$$a_n \sim \frac{\beta n(1+\delta^{'})}{ma}, \quad b_n \sim \sqrt{\frac{2mn(1+\delta^{'})}{\beta a}} \frac{1}{\delta^{'}},$$

причем $\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{\frac{2m^3 a}{n\beta^3(1+\delta^{'})}} \frac{1}{\delta^{'}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = o(1)$,

$$g_n(0) \sim \sqrt{\frac{m^3 a\beta}{2\beta^2 n(1+\delta`)}} = O\left(\sqrt{\frac{m^3\beta}{\beta^2 n}}\right) = O(\sqrt{\beta}).$$

Если $g_n(0)$ стремится к бесконечности, то $i = \frac{(mn)^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{1}{4}}}$ обеспечивает доказуемое.

Теорема 4 доказана.

Литература

1. *McKendric A.G.* Applications of Mathematics to medical problems // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Vol. 44. Edinburgh, 1926. P. 98–130.
2. *Bartlett M.S.* An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.
3. *Bailey N.T.J.* Some problems in the statistical analysis of epidemic data // J. Roy Statist. Soc. Ser. B. 1955. Vol. 17. P. 35–38.
4. *Bailey N.T.J.* The mathematical theory of epidemic. New York: Hafner publishing company, 1957.
5. *Gani J.* On the partial differential equation of epidemic theory // Biometrica. 1965. Vol. 52 (34). P. 617–622.
6. *Kendall D.G.* Deterministic and stochastic epidemic in closed population // Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 4: Contributions to Biology and Problems of Health. Berkeley, CA: University of California Press, 1956. P. 149–165.
7. *Whittle P.* The outcome of stochastic epidemic a note on Baileys paper // Biometrica. 1955. Vol. 42. P. 116–122.
8. *Нагаев А.В., Старцев А.Н.* Асимптотический анализ одной стохастической модели эпидемии // Теория вероятностей и ее приложения. 1970. Т. 15, № 1. С. 97–105.

9. *Нагаев А.В., Старцев А.Н.* Пороговая теорема для одной модели эпидемии // Математические заметки. 1968. Т. 2. С. 179–185.
10. *Нагаев А.В.* Некоторые предельные теоремы для общей стохастической модели эпидемии // Математические заметки. 1973. Т. 13. № 5. С. 709–714.
11. *Старцев А.Н.* Оценка скорости сходимости в предельных теоремах для размера эпидемии // Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1974. С. 163–172.
12. *Старцев А.Н.* Предельные теоремы для размера эпидемии в общей вероятностной модели // Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1971. С. 60–73.
13. *Старцев А.Н., Чай З.С.* Об одной обобщенной вероятностной модели эпидемии // Асимптотические методы математической статистики. Ташкент: Фан, 1987. С. 108–119.
14. *Severo N.C.* Generalization of some stochastic epidemic models // Math. Biosci. 1969. Vol. 4. P. 395–402.
15. *Watson R.* On the size distribution for epidemic models // J. Appl. Prob. 1980. Vol. 17 (4). P. 912–921.
16. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 655 с.

References

1. McKendric AG. Applications of Mathematics to medical problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. Vol. 44. Edinburgh, 1926. P. 98–130.
2. Bartlett MS. *An Introduction to Stochastic Processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.
3. Bailey NTJ. Some problems in the statistical analysis of epidemic data. *J. Roy Statist. Soc. Ser. B*. 1955;17:35-8.
4. Bailey NTJ. *The mathematical theory of epidemic*. New York: Hafner publishing company, 1957.
5. Gani J. On the partial differential equation of epidemic theory. *Biometrica*. 1965;52:617-22.
6. Kendall DG. Deterministic and stochastic epidemic in closed population. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 4: Contributions to Biology and Problems of Health*. Berkeley, CA: University of California Press, 1956. P. 149–165.
7. Whittle P. The outcome of stochastic epidemic a note on Baileys paper. *Biometrica*. 1955;42:116-22.
8. Nagayev AV., Startsev AN. Asymptotic Analysis of One Stochastic Epidemic model. *Teoriya veroyatnostei i ee prilozheniya*. 1970;15:97-105. [In Russ.]
9. Nagayev AV., Startsev AN. Threshold theorem for one epidemic model. *Matematicheskie zametki*. 1968;2:179-85. [In Russ.]
10. Nagayev AV. Some limit theorems for a general stochastic epidemic model. *Matematicheskie zametki*, 1973;13:709-14. [In Russ.]
11. Startsev AN. Estimation of convergence rate in limit theorems for the epidemic magnitude. V: *Random processes and statistical conclusions*. Tashkent: Fan Publ.; 1974. p. 163–72. [In Russ.]

12. Startsev AN. Limit theorems for the epidemic magnitude in a general probabilistic model. V: *Random processes and statistical conclusions*. Tashkent: Fan Publ.; 1971. p. 60-73. [In Russ.]
13. Startsev AN., Chay ZS. About one generalized probabilistic model of the epidemic. V: *Asymptotic methods of mathematical statistics*. Tashkent: Fan Publ.; 1987. p. 108-19. [In Russ.]
14. Severo NC. Generalization of some stochastic epidemic models. *Math. Biosci*. 1969;4: 395-402.
15. Watson R. On the size distribution for epidemic models. *J. Appl. Prob*., 1980;17: 912-21.
16. Gikhman II., Skorokhod AV. *Introduction to the random processes theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1965. 655 p. [In Russ.]

Информация об авторах

Шакир К. Форманов, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Узбекистана, Институт математики им. В.И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; Узбекистан, Ташкент, 100125, проезд Дурмон Йули, д. 29; shakirformanov@yandex.com

Зоя С. Чай, кандидат физико-математических наук, доцент, Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада ал-Хорезми, Ташкент, Узбекистан; Узбекистан, Ташкент, 100200, проспект Эмира Тимура, 108; chay1526@mail.ru

Information about the authors

Shakir K. Formanov, Dr. of Sci. (Mathematics), professor, academician of Academy of Sciences of Uzbekistan, Romanovsky Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bld. 29, Durmon Yoli lane, Tashkent, Uzbekistan, 100125; shakirformanov@yandex.com

Zoya S. Chay, Cand. of Sci. (Mathematics), associate professor, Muhammad al-Khwarizmi Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan; bld. 108, Amir Temur str., Tashkent, Uzbekistan, 100200; chay1526@mail.ru

Дизайн обложки
Е.В. Амосова

Корректор
Н.К. Егорова

Компьютерная верстка
М.Е. Заболотникова

Подписано в печать 28.06.2019.
Формат 60×90 1/16.
Уч.-изд. л. 6,5. Усл. печ. л. 5,9.
Тираж 1050 экз. Заказ № 605

Издательский центр
Российского государственного
гуманитарного университета
125993, Москва, Миусская пл., 6
www.rggu.ru
www.knigirggu.ru