МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «РГГУ»)

Институт информационных наук и технологий безопасности
Факультет информационных систем и безопасности

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

по фундаментальной и прикладной математике на магистерскую программу
01.04.04 Прикладная математика
Направленность: «Математические методы и модели обработки и защиты информации в социотехнических системах»

Москва 2024

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа вступительного экзамена на магистерскую программу «Математические методы и модели обработки и защиты информации в социотехнических системах» отражает современное состояние данного научного направления и включает важнейшие разделы, знания которых необходимо для поступления на эту программу.

Поступающий на данную магистерскую программу должен не только владеть необходимым объёмом знаний в рамках вузовской подготовки специалистов и бакалавров в области фундаментальной и прикладной математики, но и уметь разбираться в теоретических подходах к решению задач прикладного содержания.

В основу программы положены следующие вузовские дисциплины: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Линейная алгебра», «Теория функций комплексного переменного», «Математическая логика», «Теория вероятностей», «Математическая статистика и теория случайных процессов», «Дискретная математика», «Общая алгебра и теория чисел», «Функциональный анализ».

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

1. Математический анализ

1. Последовательность (определение, операции над последовательностями, свойства последовательностей и операций над ними). Предел последовательности (определение). Теоремы о существовании и единственности предела последовательности (формулировка, доказательство). Критерий Коши сходимости последовательности.
2. Монотонная последовательность (определение). Примеры. Доказательство сходимости монотонной ограниченной последовательности.
3. Теорема о вложенных отрезках (формулировка, доказательство).
4. Предел функции в точке (определения по Коши и по Гейне, основные свойства предела).
5. Непрерывность функции в точке (определение). Классификация точек разрыва функции. Примеры.
6. Производная функции в точке (определение, геометрический и физический смысл). Дифференцируемость функции в точке (определение). Теорема о связи между дифференцируемостью функции в точке и непрерывностью (формулировка, доказательство).
7. Дифференциал функции в точке (определение, геометрический смысл). Теорема об инвариантности первого дифференциала (формулировка, доказательство).
8. Непрерывность функции в точке (определение). Основные теоремы о непрерывных функциях: первая и вторая теоремы Больцано-Коши, первая и вторая теоремы Вейерштрасса (формулировка).
9. Теорема Ролля (формулировка, доказательство, геометрический смысл).
10. Теорема Лагранжа (формулировка, доказательство, геометрический смысл).
11. Первое правило Лопиталя (формулировка, доказательство). Второе правило Лопиталя (формулировка).
12. Теоремы о необходимом и достаточном условиях возрастания (убывания) функции на замкнутом промежутке (формулировка, доказательство).
13. Экстремум функции в точке (определение). Теоремы о необходимом и достаточном условиях экстремума (формулировка, доказательство).
14. Определение направления выпуклости кривой с помощью второй производной. Точка перегиба (определение), ее нахождение.
15. Параметрическое задание функции. Формула производной функции, заданной параметрическими уравнениями (вывод).
16. Теорема Тейлора (формулировка). Формула с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Пеано. Примеры разложения элементарных функций по формуле Тейлора.
17. Двойной интеграл (определение, геометрический смысл, метод вычисления). Примеры.
18. Формула замены переменных в двойном интеграле (общий случай и переход к полярным координатам).
19. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода (определение, методы вычисления). Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования (формулировка, формула вычисления).

20. Связь между двойным и криволинейным интегралами 2-го рода. Формула Грина.
21. Тройной интеграл (определение, физический смысл, формула вычисления).
22. Векторный анализ: скалярные и векторные поля, их характеристики. Специальные виды векторных полей.
23. Формула замены переменной в неопределённом интеграле (доказательство). Примеры вычисления неопределённых интегралов с использованием данной формулы.
24. Формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла (доказательство). Примеры вычисления неопределённых интегралов с использованием данной формулы.
25. Теорема разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей (формулировка). Примеры интегрирования рациональных функций с использованием данной теоремы и метода неопределённых коэффициентов.
26. Определённый интеграл (определение, геометрический смысл). Теоремы о необходимом и достаточном условиях существования определённого интеграла (формулировка).
27. Теорема о производной от определённого интеграла по переменному верхнему пределу (формулировка, доказательство).
28. Теорема о среднем для определённого интеграла (формулировка, доказательство).
29. Формула Лейбница для определённого интеграла (вывод). Формула замены переменной для определённого интеграла, примеры её применения.
30. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций (определение). Теоремы сравнения, устанавливающие сходимость или расходимость данного несобственного интеграла (формулировка). Примеры применения данных теорем.
31. Необходимый признак сходимости числового ряда (формулировка, доказательство). Показать на примере гармонического ряда, что необходимый признак не является достаточным.
32. Признак Даламбера для сходимости рядов с положительными членами (формулировка, доказательство). Примеры применения.
33. Радикальный и интегральный признаки Коши для установления сходимости или расходимости рядов с положительными членами (формулировка). Примеры.
34. Признак Лейбница для сходимости знакочередующегося ряда (формулировка, доказательство).
35. Теорема об абсолютной сходимости знакопеременного ряда (формулировка, доказательство).
36. Теорема Абеля для степенного ряда (формулировка, доказательство). Формула нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

2. Дифференциальные уравнения

1. Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной (формулировка, геометрический смысл). Общее и частное решения уравнений первого порядка (определение).
2. Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (определение), метод его решения. Примеры.
3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (определение), метод его решения. Примеры.
4. Дифференциальное уравнение n-го порядка (определение). Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения второго

порядка, разрешённого относительно второй производной (формулировка, геометрический смысл).

5. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (формулировка). Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от характера корней характеристического уравнения.

3. Линейная алгебра

1. Векторное пространство. Линейные комбинации. Линейная зависимость. Базис. Размерность. Теорема Кронекера - Капелли.
2. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Пространство решений однородной системы.
3. Связь между базисами. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса. Матрица перехода.
4. Линейные операторы. Связь между линейными операторами в разных базисах.
5. Линейные подпространства.
6. Собственные векторы и значения линейного оператора.
7. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
8. Линейные пространства со скалярным произведением.

4. Теория функций комплексного переменного

1. Жордановы кривые, гладкие кривые, кусочно-гладкие кривые.
2. Уравнение Коши-Римана.
3. Геометрический и гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости.
4. Степенные функции.
5. Теорема Коши для треугольника.
6. Теорема Тейлора.
7. Общая теорема Коши.
8. Интегральная формула Коши.
9. Теорема Лиувилля.
10. Формула Коши-Адамара для радиуса круга сходимости.
11. Теорема Морера.
12. Порядок нуля голоморфной функции.
13. Теорема Лорана.

5. Математическая логика

1. Алгебра высказываний. Тавтология. Выполнимая формула.
2. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода. Логические следствия.
3. Непротиворечивость и независимость аксиом. Теорема о полноте исчисления высказываний.
4. Предикаты. Кванторы.

6. Теория вероятностей

1. Случайные события. Алгебра событий. Классическая вероятностная схема. Условные вероятности и независимость событий. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Схема Бернулли. Аксиоматика теории вероятностей.
2. Случайные величины. Функции распределения и плотности вероятностей. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Коэффициент ковариации и корреляция случайных величин.
3. Биномиальный и Пуассоновский законы распределения случайных величин. Равномерный, экспоненциальный и нормальный законы распределения.

4. Предельные теоремы и примеры их применения. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Центральная предельная теорема.

5. Математическая статистика и теория случайных процессов

1. Основные задачи математической статистики. Вариационные ряды и их графическое представление. Средние величины и показатели вариации. Начальные и центральные моменты.
2. Точечные оценки параметров распределений. Свойства оценок. Метод моментов и его применение для нахождения точечных оценок параметров распределений. Метод максимума правдоподобия. Интервальное оценивание параметров распределений.
3. Общая схема проверки статистических гипотез. Ошибки I и II рода. Уровень статистической значимости. Проверка гипотез о математическом ожидании и дисперсии нормального распределения. Проверка гипотез о законе распределения.
4. Случайные процессы и их характеристики. Потоки событий и их свойства. Определение пуассоновского процесса. Цепи Маркова. Уравнения Колмогорова. Процессы гибели и размножения. Элементы теории массового обслуживания.

5. Дискретная математика

1. Множество. Булеан. Отношения. Отношение эквивалентности. Фактор-множество. Отношение частичного порядка. Диаграмма Хассе.
2. Булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций. Понятие формулы. Простейшие тождества. СДНФ. СКНФ. Полином Жегалкина. Замкнутость. Классы Поста булевых функций. Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста). Базис.
3. Комбинаторика: правила суммы и произведения; размещения, сочетания, перестановки. Формулы для нахождения числа сочетаний, размещений (с повторениями и без), перестановок.
4. Полиномиальная формула. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Формула включений и исключений.
5. Графы. Матрица смежности и инцидентности. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Критерий квазиэйлеровости графа. Основная теорема о деревьях. Планарность. Формула Эйлера. Теорема Понтрягина-Куратовского.
6. Абстрактный автомат. Автоматы Мили и Мура. Примеры.
7. Машина Тьюринга.

7. Общая алгебра и теория чисел

1. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел.
2. Квадратические иррациональности. Теорема Лагранжа.
3. Свойства сравнений.
4. Сравнения первой степени с одним неизвестным.
5. Сведение сравнений $f(x) = 0 \pmod{p^n}$ к сравнению по модулю p.
6. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра и его свойства.
7. Классы показателей по модулю m. Классы первообразных корней. Построение конечного поля заданного порядка с помощью неприводимых многочленов.
8. Поиск порождающих элементов мультипликативной группы для заданных полей. Описание подполей заданного конечного поля.

8. Функциональный анализ

1. Кольцо множеств.
2. Полные метрические пространства: принцип вложенных шаров.
3. Действительные функции на метрических и топологических пространствах.
4. Общее понятие меры.
5. Измеримые функции: сходимость по мере.
6. Пространства $L1$ и $L2$.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ОТВЕТОВ

(отлично)	Абитуриент показывает прочные знания по вопросам программы, ответ отличается глубиной и полнотой; уверенное владение понятийным аппаратом; умение объяснять сущность информационных процессов, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы на дополнительные вопросы, приводит примеры; свободное владение речью, логичность и последовательность ответа.
(хорошо)	Абитуриент демонстрирует достаточные знания по вопросам программы, ответ полный; владение понятийным аппаратом; умение объяснять сущность информационных процессов, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы на дополнительные, приводить примеры; свободное владение речью, логичность и последовательность ответа. Допускается одна - две неточности в ответе.
(удовлетворительно)	Абитуриент даёт ответ, свидетельствующий в основном о знании вопросов программы, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой; знает основные вопросы теории; навыки анализа информационных процессов сформированы слабо, показывает недостаточное умение давать аргументированные ответы и приводить примеры; демонстрирует недостаточно свободное владение речью, недостаточную логичность и последовательность ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа.
(неудовлетворительно)	Ответ обнаруживает незнание вопросов программы, отличается неглубоким и неполным раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа информационных процессов; абитуриент не умеет давать аргументированные ответы на дополнительные вопросы, слабо владеет речью, демонстрирует отсутствие логичности и последовательности. Имеются серьезные ошибки в содержании ответа.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

Математический анализ

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2 частях. — Изд. 4-е, стер. - СПб:Лань, 2004. Ч. 1. - 448с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2 частях. — Изд. 4-е, стер. - СПб:Лань, 2004. Ч. 2. - 463 с.
3. Краснова С. А. Основы математического анализа: учеб. пособие / С. А. Краснова, В. А.Уткин; [отв. ред. В. В. Кульба; Федер. агентство по образованию, Гос. образоват.
4. учреждение высш. проф. образования "Рос. гос. гуманитарный ун-т"]. - М.: РГГУ, 2010. -557 с.: рис.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие длявтузов / Н. С. Пискунов. - Изд. 13-е. - М.: Наука, 1985. - 22 см.
6. Ч. 1. - 1985. - 432 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. - Изд. 13-е. - М.: Наука, 1985. - 22 см, Ч. 2. - 1985. - 560 с.

Линейная алгебра. Общая алгебра и теория чисел

1. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика" / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; [МГУ им. М. В. Ломоносова]. - Изд. 6-е, стер. - М.: Физматлит, 2007. - 278 с.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник для студентов ун-тов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Прикл. математика" / А. И. Кострикин. - М.: Наука, Физматлит, 2000. - Ч. 3: Основные структуры алгебры. - 2000. - 271 с.
3. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. / [Болгов В. А. и др.]; под общ. ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидович. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1993-. - ISBN 5-02-014338-3.
4. Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа. - М.: Наука, 1993. – 478с.

Дискретная математика

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов. – М.:Высш.шк., 2008.- 384 с.
2. Аляев Ю.А. Дискретная математика и математическая логика: учебник/ Ю.А. Аляев,С.Ф.Тюрин.- М.: Финансы и статистика, 2006. – 364 с.
3. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике/ Г. П. Гаврилов, А. А.Сапоженко. - Изд. 3-е, перераб. - М.: Физматлит, 2009. - 416 с.
4. Викторова Н.Б. (штат). Дискретная математика. Булевы функции: сборник контрольныхработ. – Москва, ООО «Проспект», 2018.- 80с.

Теория функций комплексного переменного

1. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной: учебник для студентов физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - Изд. 6-е, стер. - М.: Физматлит, 2010. - 335 с. - (Курс высшей математики и математической физики; вып. 5).

Дифференциальные уравнения

2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения: учебник для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов/ Л. Э. Эльсгольц. - Изд. 6-е. - М.: УРСС: КомКнига, 2006. - 309 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. - М.;Ижевск: РХД, 2005. - 174 с.+2013

Теория вероятностей. Математическая статистика и теория случайных процессов

1. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник/ Н. Ш. Кремер. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2006. - 573 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб. - М.: Высш. образование, 2006. - 478 с.

Функциональный анализ

1. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика: учеб. пособие длястудентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика" / В. И. Лебедев. - Изд. 4-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2005. - 295 с.
2. Ревина С.В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета (ЮФУ), 2009. - 120 с. - ISBN 9785927506835. -[ЭБС "znanium.com"]

Теория графов

1. Судоплатов С. В. Элементы дискретной математики: учебник. - М.: Инфра-М, 2003. -279 с.
2. Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. - Изд. 2-е,доп. - М.: Лаб. базовых знаний, 2003. - 376 с.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Дискретная математика:

1. Викторова Н.Б. Дискретная математика. Булевы функции: сборник контрольных работ. – Москва, ООО «Проспект», 2018.- С. 71-73 (контрольная работа №3, вариант 30).

Линейная алгебра:

1. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. / [Болгов В. А. и др.] ; под общ. ред. А.В.Ефимова, Б. П. Демидович. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1993-. - ISBN 5-02-014338-3. Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа. - М.: Наука, 1993.
Глава 4, №№ 4.136, 4.141, 4.172, 4.175, 4.214.

В задачах **№№ 4.136, 4.141** найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей.

№4.136

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№4.141

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

В задачах **№№ 4.172, 4.175** выяснить, можно ли заданную матрицу линейного оператора диагонализировать переходом к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

№4.172

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 4.175

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

№4.214. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду.

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

<u>Теория графов:</u>

1. Дать определение матрицы смежности графа, описать ее свойства. Построить граф, который описывается следующей матрицей инцидентности:

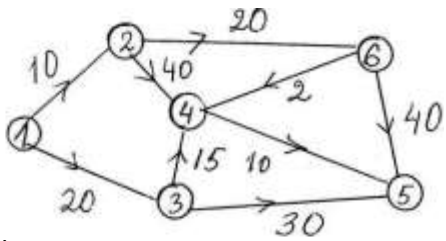
$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Привести по 2 примера двудольного графа, регулярного графа степени 4, пример кубического графа.

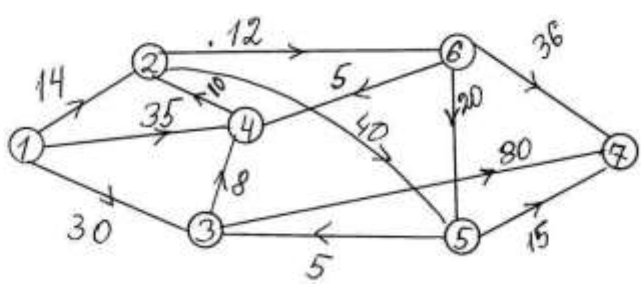
3. Построить граф с 6 вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

4. Найти кратчайший путь

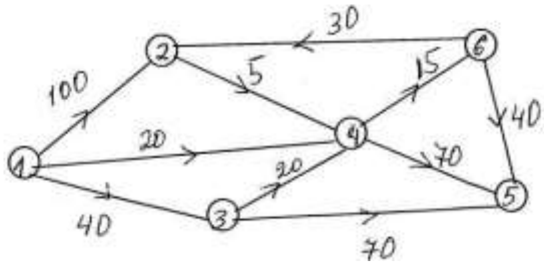
а) из V_1 в V_5:



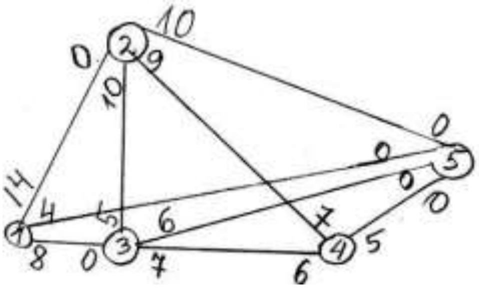
б) из V_1 в V_7:



в) из V_1 в V_5:

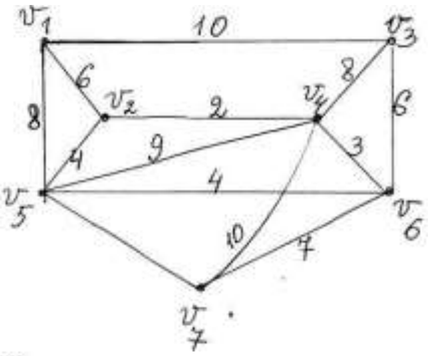


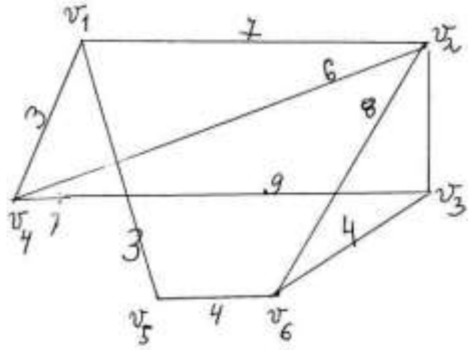
5. Найти максимальный поток из 1 в 5:



6. Построить минимальное основное дерево)

б)





Литература к заданиям №№ 4-6:

1. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций: В 2 кн / Х. Таха; Пер. с англ. В.Я.Алтаева и др. - М.: Мир, 1985.
2. Кн.1: . / Х. Таха. - 1985. - 479 с. табл.,рис.
3. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций: В 2 кн / Х. Таха; Пер. с англ. В.Я.Алтаева и др. - М.: Мир, 1985.
4. Кн.2: . - 1985. - 496 с.: табл.,рис.