Выписка из программы ГИА

Государственный междисциплинарный экзамен
по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

(уровень – академический бакалавриат)

В билет государственного междисциплинарного экзамена входят 2 вопроса, раскрывающие теоретическую подготовку по все разделам и 1 вопрос –практическое задание. В одном билете должны быть вопросы из разных модулей (дисциплин) учебного плана.

Государственный экзамен предусматривает оценивание уровня овладения выпускниками компетенций, установленных ФГОС ВО и дополнительных компетенций, установленных ООП ВО.

Контрольные вопросы программы государственного междисциплинарного экзамена по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика
(в редакции 2023/24 уч.гг.)

Математический анализ

1. Предел числовой последовательности Свойства предела последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонная последовательность. Критерий существования предела монотонной последовательности. Число е. Предел функции в точке (определения по Коши и по Гейне). Основные свойства предела функции. Первый замечательный предел. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Свойства непрерывных функций. Основные теоремы о непрерывных функциях.
2. Производная функции в точке. Определение, геометрический и физический смысл. Дифференцируемость функции в точке. Теорема о связи между дифференцируемостью в точке и непрерывностью. Дифференциал функции. Основные правила дифференцирование. Производные основных элементарных функций.
3. Основные теоремы дифференциального исчисления. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа и форме Пеано. Примеры разложения элементарных функций по формуле Тейлора.
4. Условии монотонности функции. Условие внутреннего экстремума функции. Условие выпуклости функции. Асимптоты.
5. Первообразная и неопределенный интеграл. Замена переменной в неопределѐнном интеграле. Формула интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование тригонометрических выражений.
6. Определенный интеграл. Интегрируемые функции. Необходимое условие интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Производная от интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла.
7. Двойной интеграл. Замены переменных в двойном интеграле (общий случай и переход к полярным координатам). Площадь области. Объем цилиндра. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Связь между двойным и криволинейным интегралами 2-го рода. Формула Грина. Тройной интеграл.

8. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сравнения рядов. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак сходимости. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Условная и абсолютная сходимость.
9. Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Разложение в ряд Тейлора. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье.
10. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. Частные производные. Экстремум функции. Условный экстремум. Функция Лагранжа.

Дифференциальные уравнения

1. Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешѐнного относительно производной. Геометрический смысл. Общее и частное решение уравнения первого порядка. Уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Методы решений.
2. Дифференциальное уравнения высших порядков. Теорема Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейное однородное и неоднородное уравнение. Исследование на линейную зависимость системы функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейные неоднородные уравнение. Метод вариации постоянных.
3. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Теорема Коши. Линейные однородные системы. Фундаментальная система решений однородной системы. Метод решения однородных систем с постоянными коэффициентами методами линейной алгебры. Линейные неоднородные системы. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Метод вариации постоянных.
4. Понятие дифференциального уравнения с частными производными и его решения. Уравнения гиперболического и параболического типа. Волновое уравнение. Уравнение теплопроводности. Уравнение диффузии. Постановка краевых задач в одномерном и двумерном случае.
5. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Уравнения Лапласа и Пуассона на плоскости и в пространстве. Гармонические функции. Постановка и принципы построения решений задач Дирихле и Неймана. Численные метода Эйлера решения уравнений с частными производными.

Линейная алгебра

1. Линейные пространства. Примеры. Базис. Единственность разложения вектора по базису. Размер ность. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса.Матрица перехода.
2. Системы линейных уравнений. Общие понятия. Однородные и неоднородные системы. Матрицы. Операции над матрицами. Определители. Их свойства. Про странство решений однородной системы. Фундаментальная система решений однородной системы. Теорема Кронекера - Капелли. Структура решения неоднородной системы линейных уравнений.
3. Линейные операторы. Связь между линейными операторами в разных базисах. Собственные векторы и значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Математическая логика

1. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода. Непротиворечивость и независимость аксиом. Теорема о полноте исчисления высказываний.
2. Определение предиката. Кванторы. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов без доказательства.

Теория вероятностей

1. Случайные события. Алгебра событий. Классическая вероятностная схема. Условные вероятности и независимость событий. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Схема Бернулли. Аксиоматика теории вероятностей.
2. Случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Коэффициент ковариации и корреляция случайных величин.
3. Предельные теоремы и примеры их применения. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Центральная предельная теорема.

Математическая статистика и теория случайных процессов

1. Точечные оценки параметров распределений. Свойства оценок. Метод моментов и его применение для нахождения точечных оценок параметров распределений. Метод максимума правдоподобия. Интервальное оценивание параметров распределений.
2. Общая схема проверки статистических гипотез. Ошибки I и II рода. Уровень статистической значимости. Мощность статистического критерия. Проверка гипотез о законе распределения. Другие задачи проверки статистических гипотез и соответствующие статистические критерии.

Дискретная математика

1. Алгебра высказываний. Булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций. Понятие формулы. Простейшие тождества. СДНФ. СКНФ. Полином Жегалкина. Замкнутость. Классы Поста булевых функций. Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста).
2. Комбинаторика: правила суммы и произведения. Размещения, сочетания, перестановки. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Формула включений и исключений.
3. Машина Тьюринга. Нормальные алгоритмы Маркова.
4. Графы. Матрица смежности и инцидентности. Планарность. Проблема изоморфизма графов.
5. Деревья. Остовное дерево. Бинарные деревья. Кодирование деревьев.

Общая алгебра и теория чисел

1. Определение группы. Таблицы Кэли. Циклические группы. Определение кольца. Кольцо матриц. Конечное кольцо вычетов. Определение поля. Понятие изоморфизма. Поле комплексных чисел.
2. Делимость целых чисел. НОД. НОК. Основная теорема арифметики. Понятие решета Эратосфена. Алгоритм Евклида. Диофантовы уравнения. Мультипликативные функции. Функция Мебиуса. Функция Эйлера. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Решение сравнений первой степени.

Примерный вариант практических заданий для подготовки

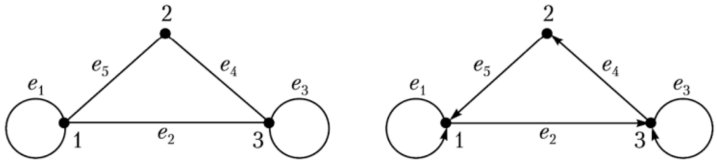
к государственному экзамену

1. Найти собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Выяснить, приводима ли матрица линейного оператора к диагональному виду
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. В задаче найти фундаментальную систему и решить однородную систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad +x_3 = 0 \\ x_1 + \quad x_2 \quad + \quad x_3 = 0 \\ 3x_1 \ -2x_1 \quad +2x_1 = 0 \end{cases}.$$

3. Построить график функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой y=ln x и прямыми x=e, x=e^2, y=0.
5. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_G \ (x^2+y^2)dxdy$, где область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.
6. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$.
7. Решить дифференциальное уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=(x^2+x)e^{3x}$.
8. Найти общее решение системы $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=x_1+x_2 \\ \frac{dx_2}{dt}=-2x_1+3x_2 \end{cases}$.
9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$.
10. Пусть $f(x)=\begin{cases} -1, \text{при} -\pi < x \le 0 \\ 1, \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$ периодическая функция с периодом 2π. Разложить ее в ряд Фурье.
11. Найти условный экстремум функции z=2x+y при условии $x^2+y^2=1$.
12. Исследовать, является ли полной система булевых функций
$$B=\{xy\oplus yz\oplus zx, xy\oplus z, x\oplus y\oplus z\oplus 1\}.$$
13. Написать машину Тьюринга. $A=\ \{a,b,c\}$. Если в слово P не входит символ a, то заменить в P все символы b на c, иначе в качестве ответа выдать слово из одного символа a.
14. Решить сравнение, используя теорему Эйлера 3x$\equiv 5(mod 7)$.
15. Написать нормальный алгоритм Маркова. $A=\{0,1,2,3\}$. P – непустое слово. Трактуя его как запись неотрицательного целого числа в четверичной системе счисления, требуется получить запись этого же числа, но в двоичной системе.
16. Найти матрицу смежности и инцидентности графов. Найти все маршруты длины 3 с началом в вершине 1 и концом в вершине 2.



17. Для планарного графа, заданного своей матрицей смежности(в матрице смежности указано число ребер, соответствующих соответствующим вершинам), выяснить выполнение условия формулы Эйлера и подсчитать степень всех областей

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
$$